

算数・数学と音楽との関連についての一考察

橋本 吉貴 (教育学科)

Study on Relationships between School Mathematics and Music

Yoshitaka Hashimoto

Department of Education, Kamakura Women's University

Abstract

The objective of this study is to clarify the following matters. First, what has been discussed in previous studies on the relationships between school mathematics and music? Second, in what situations are teachings on both school mathematics and music actually practiced?

The findings of the study clarify two facts. The first is that a Pythagorean temperament and equal temperament are deeply related with school mathematics. The second is that calculation with musical notes, the reading of musical phrases, changes in rhythm, etc. can be treated as topic matters.

Key words: school mathematics, music, note, symmetry, Pythagorean temperament, equal temperament

キーワード：算数・数学、音楽、音符、対称、ピタゴラス音律、平均律

1. はじめに

2020年施行予定の小学校学習指導要領では、「主体的・対話的で深い学び」が強調されながら盛り込まれるようである。「主体的な学び」と「対話的な学び」については、中央教育審議会の「次期学習指導要領に関するこれまでの審議のまとめ 補足資料」(2016)より、そして「深い学び」については『小学校学習指導要領』(2018)に、次のように記されている。

【主体的な学び】

学ぶことに興味や関心を持ち、自己のキャリア形成の方向性と関連付けながら、見通しを持って粘り強く取り組み、自己の学習活動を振り返って次につなげる「主体的な学び」が実現できているか。

【対話的な学び】

子供同士の協働、教職員や地域の人との対話、先哲の考え方を手掛かりに考えること等を通じ、自己の考えを広げ深める「対話的な学び」が実現できているか。

【深い学び】

各教科等の特質に応じた見方・考え方を働かせながら、知識を相互に関連付けてより深く理解したり、情報を精査して考えを形成したり、思いや考えをもとに創造したりすることに向かう「深い学び」が実現できているか。

そこで、3つ目の「深い学び」の中に示されている「知識を相互に関連付けてより深く理解したり・・・」という文言に注目した。筆者の研究分野

である算数・数学と他教科を結びつけられないだろうか考えた。例えば、小学校の主要4教科との関連では、国語で長い文章を読む力と算数の文章題を解く力、または、理科で水の温度変化を折れ線グラフに表したり、社会で農産物の割合を円グラフに表したりするような活動と算数の内容は関連している。

筆者は現在、大学の教育学部と児童学部の学生を対象に、算数・数学の授業を担当している。その中で、8歳頃から現在に至るまでピアノを習っている経験を活かして、大学の音楽系部活の1つである、シルフィード・アンサンブルの顧問を務めている。それらの経験の中で、ピアノの楽譜の中には、 $\frac{2}{4}$ 拍子といった分数や音符の長さに算数・数学が使われていることに着目した。そこで、音楽と数学という教科の間には、何か関連性があるのではないだろうかと考え、その関連性を考察することによって、教育的に有意義な示唆が得られないか考えた。

児童や生徒に、算数・数学と音楽に関連した事柄に興味や関心を持たせることで、教科という枠を超えて彼らの探究心を育てられれば、児童や生徒が深い学びを経験することができるものではないか考えた。

『小学校学習指導要領解説 音楽編』(2018)によると、教科目標に「表現及び鑑賞の活動を通して、音楽的な見方・考え方を働かせ、生活や社会の中の音や音楽と豊かに関わる資質・能力を育成することを目指す」とある。そして、「音楽的な見方・考え方を働かせた音楽科の学習を積み重ねることによって広がったり深まったりするなどし、その後の人生においても生きて働くものとなる」とある。

『小学校学習指導要領解説 算数編』(2018)によると、目標に示されている文言「生活や学習」についての解説の中で「学習については、他教科の学習はもとより、これから先の算数や数学の学習にも含めて考えることが大切である。」とある。算数を他教科と結びつけて考えていくことは極めて有効である。

2. 研究の目的

(1) 算数・数学と音楽に関連した先行研究を通して、どのようなことが論じられているのかを明らかにすること。

(2) 算数・数学の場面で使われている音楽の題材、逆に音楽の場面で使われている数学的要素について、それらがどのような場面で活かされているのかを明らかにすること。

3. 研究の方法

上記2つの目的を達成するために、以下の方法で研究を行う。

(1) 過去57年分(1961年～2017年)の日本数学教育学会誌『算数教育』、『数学教育』、『総会特集号』と、『数学教育論文発表会論文集』に掲載されている先行研究と『数学教育学研究ハンドブック』(2010)にあたり、算数・数学と音楽の関連性についての論文を調べる。ここで「57年分」となっているのは、『数学教育学研究ハンドブック』の中で分析されている論文が1961年～2017年となっているためである。

(2) 算数・数学と音楽に関わる内容を執筆した文献をもとに、2つの教科に関連のある事柄について調べる。

4. 研究の内容

(1) 算数・数学と音楽に関連した先行研究

過去57年分(1961年～2017年)の先行研究を調べるにあたって、特に10年以上前のものについては、日本数学教育学会の事務局まで足を運び、文献の検索を行った。

なお、多くの文献には「ピタゴラス音階」、「ピタゴラス音律」という用語が両方登場するが、本稿では、よく使われる「ピタゴラス音律」の方で統一させることにする。

① ピタゴラス音律の例

小倉(2009)は、ピタゴラスが発見した「弦の長さを半分にすると、1オクターブ高い音が出る」「弦の長さを3分の2にすると、5度高い音(ド

に対してソの音) が出る」という性質を用いて、実際に生徒にストローを使って笛を作らせ、数学的活動を含む教材として報告している。ストローで音階を作る手順を、以下に引用する。

【手順】

- ア 低いドの音を18cmとする。1オクターブ高いドは、18cmの半分になるので9cm。
 - イ ソの音を作る。18× $\frac{2}{3}$ =12。12cm。
 - ウ 以下、同様の手順を繰り返すと、レ→ラ→ミ→シの順に音を作ることができる。
 - エ ファだけは、「ドよりも5度低い音」として、作る。
- 低いドの音が9cmなので、 $\frac{2}{3}$ の逆数である $\frac{3}{2}$ をかけて、 $9 \times \frac{3}{2} = 13.5$ 。よって、13.5cm

この手順によって、ピアノの白鍵である、「ドレミファソラシド」がすべて完成できる。

山下(1980)は、ピタゴラス音律を数学の「巡回群」の話題と結びつけ、数学と他教科の関連を取り上げ授業を行った。ある音xに対して、振動数が $\frac{2}{3}$ 倍の音をG(x)と表す。基音(ここではcのドの音)の振動数を1とし、G(1)=Gと書くと、次のようなピタゴラス音律が得られる。

表1 Gを使った表記と実音との関係

Gの表記	G-3	G-2	G-1	1	G	G2	G3
音	es	b	f	c	g	d	a
	(ミ♭)			(ド)			

表1において、「1」の音を基準にして、右方向には振動数を $\frac{3}{2}$ 倍にした音(5度上げた音)を、左方向にはその逆の音(5度下げた音)が順に書かれている。なお、G-3の「es」はあまり聞き慣れないが「ミ♭」を示す音である。

表1の一番右側のG3、a(ラ)の音からG4、G5、・・・と進めていくと、G12の場所で再びC(ド)の音が現れる。以後、c→g→d→a・・・の順に音が繰り返して現れるので、数学の巡回群の話題と結びつけて、授業の中で生徒に説明をしている。

② ギターを使った実践事例

ギターは、指でフレット(図1の4の箇所)を押さえることにより、弦の長さを変え、弦をはじいて音を出す仕組みになっている。なお、図1は「ライセンス、クリエイティブ・コモンズ」として、著作権が認められているものから引用した。

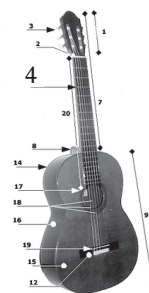


図1 ギターの各部の部位

以下の2本の論文は、ギターを使った数学的活動の実践例である。

武田(2007)は、論文のタイトル「累乗根の奏でるギター音楽」にあるように、ギターの弦の長さとの関係について、累乗根を使った理論値と実測値を比較している。

各フレットからギターの端までの弦の長さとの関係は次のようになる(表は論文から引用)。

フレット	12	11	10	9	...
音	ミ	レ#	レ	ド#	...
弦の長さ(cm)	31.4	33.2	35.2	37.3	...



図2 弦の長さの測定結果と倍率

上記のミ、レ#、・・・のそれぞれの弦の長さ「31.4、33.2、・・・」は、初項a=31.4、公比r=1.06の等比数列になっている。したがって、ミの1オクターブ下のミの弦の長さは、この等比数列の第13項となるので、ar¹²と表せる。

理論上は、音が1オクターブ下がると弦の長さは2倍になるので、ar¹²=2aより、r¹²=2
r>0より、r= $^{12}\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{12}} = 1.059463 \dots$ となり、ギターの実測値と理論値は多少の誤差を含

みつつも一致する。

伊禮（2007）は、高校1年生を対象にした実践授業について、次のように報告している。

生徒は、ギターの第1弦（図1で、一番右側にある弦）の長さとお音の高低との関係について調べた後、その法則に従って、工作用紙とストローを用いて笛を作った。授業の後、生徒からは「ギターに数学が使われていることを、初めて知った」とか、「音楽と数学がこのようにつながっていると、知りませんでした」という感想が見られたとある。

③ 平均律を計算する古代の道具

蓮沼（2004）は、音楽史における音階の形成の歴史を題材に、中学校3年生の生徒を対象にした「相似な図形」の単元の応用として行った実践授業について報告している。

生徒は、ギリシャ時代にエラトステネスが考案した、平均律を計算するための道具「Mesolabio」を模した図形を描いて、平均律の作り方についての追体験を行った。

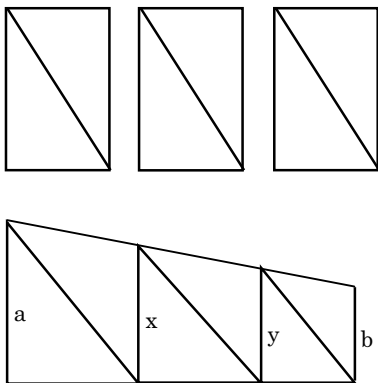


図3 Mesolabio の元になる図形

Mesolabio の元になる図形を図3にあるような形で示した。透明な3枚の板には、同じ大きさの長方形と対角線の1本が引かれている。それらを「長方形の右側の辺とその右どりの長方形の対角線との交点が一直線上になる」ように並べる。

すると、 $a:x = x:y = y:b$ となり、2つの比例中項 x , y が決まる。11個の比例中項を求めて平均律を作った。

実践授業を行った結果生徒からは数学観の変容が見られたと述べている。

白川（2004）は、他教科とのつながりという視点からピタゴラス音律を取り上げ、その音階の成り立ちを知ることによる、高校2年生の生徒の数学観の変容について考察している。

生徒は、定規とコンパスだけを使って音階の図を作図し、さらには、手作りでモノコード（1本の弦だけがついている琴）も再現し、音程を耳で確認した。また、音は形のないものなので、視覚的に捉えることができるよう波としてパソコンの画面上に表し、生徒はその波が三角関数で表されることも体験した。

歴史的道具を用いた追体験を通して、生徒は数学に対する興味・関心が高まり、数学を身近に感じることができたと述べている。

中村（2006）も同様に、手作りのモノコードを使った高等学校での実践授業を報告している。

モノコードを用いて操作的活動を行いながら、音程の違いを感じ、それを算数・数学的なものの方で見方捉えることができれば、数学のよさや生徒が自分で新しいことを発見できる喜びを感じることができると考えて、授業を行った。その結果、生徒の感想の内容から、教具を使った操作的活動が有効であり、数学に対する認識が高まったと述べている。

④ 数学覚え歌を使った実践事例

木村（1991）は、数学の教科書に登場する無理数の値や三角関数の公式などを「数学覚え歌」としてまとめている。更に、「数学史の歌」として、数学者たちの人名・国籍・主な業績を学生が歌にしたものをさらに改良した。例えば2番では、「蛍の光」のリズムに乗せて、「アルコワリズム アラビアで 代数学書 かきました カルダノ フェラーリ イタリアで 3次4次の方程式」と歌っている。

筆者は、木村氏の論文を読んで、次のように考える。5番まで歌があって、すべて違う曲（メロディ）で歌わなければいけない。それは難点では

あるが、毎日歌っていれば自然と口をつけて出てくることであろう。

⑤ 体験型の博物館での実践事例

江山（2006）は、体験的活動を通して児童・生徒が日常と算数・数学を結びつけたり、日常を数理的に見たりできる眼を育むことをねらいとして、国立科学博物館での単発的な体験学習講座で体験活動を行った。その結果、活動中には実際に使わなかった楽器について話す子どもがいたことから、博物館での単発的な体験活動がその子どもの身のまわりの日常と結びついていることを示している、と報告している。

（2）音楽の場面で使われている算数・数学

ここでは、数学者、数学愛好家や音楽家の自伝や書物の中で触れられている、算数・数学と音楽に関連している内容についてまとめる。

音楽史の話題、音符と拍子、音階の作り方に関わるピタゴラス音律や平均律、音符から読み取ることのできる最小公倍数や対称の話、ピアノを演奏する数学者の話、という順で紹介する。

①音楽史に関する話題

本稿では、数学と音楽の関連性について考察している。高等学校で使用されている教科書『高校生の音楽1』（2018）によると、「数学と音楽と哲学」という小見出しで、古代ギリシャの学問について次のような説明があったので、その一部を引用する。

紀元前6世紀頃、ピタゴラスは、同時に鳴っている2つの音の振動数が簡単な整数比（オクターブは1：2，5度は2：3など）で表されるときに、美しい響き合いが生まれることを発見したといわれています。（中略）紀元前4世紀には、哲学者プラトンが、音楽が人間の教育に役立つとし、勇敢な人を育てるには勇敢な感じの音楽を聴かせればよいと考えました。

当時から、算数・数学と音楽は結びつけて考えられていたといえる。

②音符の種類と拍子に関する話題

楽譜には、四分音符を始めとする音符や休符、速度記号、クレッシェンドなどの記号が書かれ、演奏者はそれらを読み取って演奏を行う。一番の基本になるのは、音符と拍子なので、音符と拍子に関連する文献にあたった。

坂口（2016）は、拍子について次のように述べている。

多くの音楽は、2拍子や4拍子、3拍子といった拍子に乗ってリズムが展開されることで、生き生きしたリズム感を生み出す。拍子を感じるということは、拍を数えていることと同じだ。つまり音楽を聴き、その流れを感じることは、数を感じ、かぞえているということになる。

ところで、1小節に入れることができる時間は「4拍子の曲ならば、四分音符で4拍分の長さ」というように、常に一定である。では、音楽家は曲を演奏しながら「この小節にはあとどのくらいの音が入れられか」、という計算をしながら演奏をしているのだろうか。

さらに、次のように述べている。

17世紀の大哲学者で数学者でもあったライブニッツは、こんな名言を残している。「音楽は人間が無意識に数を計算することで得られる魂の快楽である」。

やはり、音楽家たちは、無意識のうちに計算をしているようである。

ここで、話題がイメージしやすいように、筆者から楽譜を用いて説明を加える。なお、図4～図8については、「Muscore」というソフトを使って作成した。



図4 四分音符、二分音符など

ト音記号の次に4が2つ縦に並んでいるのは、 $\frac{4}{4}$ 拍子のことで、「1小節の中に♪（4分音符）で4拍分の長さを入れて楽譜が構成されている」という意味である。bは二分音符と呼ばれていて、2拍分伸ばす。cは付点二分音符で3拍分、dは全

音符で4拍分、それぞれ伸ばす。

因みに図4を1小節ごとに「=」でつなげると、 $1+1+1+1=2+2=3+1=4$ という式で表され、どの小節も四分音符で4拍分の長さになっていることがわかる。

図4を発展させて、さらに細かい音符を入れると、図5のようになる。



図5 八分音符、十六分音符など

eは八分音符、fは十六分音符と呼ばれるものである。♪(四分音符)の長さを1とすると、

eは♪の $\frac{1}{2}$ 、fは♪の $\frac{1}{4}$ の長さだけ伸ばすことになる。

③音楽の教科書に関する話題

ここからは、実際に音楽の教科書に登場する曲を例に、算数・数学と関連した内容についてみていくことにする。

まず、最も基本的なものは $\frac{4}{4}$ 拍子で、その例として、「よろこびの歌」がある。



図6 「よろこびの歌」最初の4小節

これは、ベートーヴェン作曲の交響曲第九番の第4楽章に出てくる節に日本語の歌詞をつけたものである(テンポは、『小学生の音楽3』から転記)。

「♪=120」は「1分間の間に四分音符が120個分入るテンポで演奏してください」ということである。分かりやすく例えると、「♪=60」だったら時計の秒針が動くのと同じテンポになる。「よろこびの歌」は、時計の秒針の倍の速さで四分音符を刻むテンポで演奏することになる。

次によく見られるのは、 $\frac{3}{4}$ 拍子の曲であろう。



図7 「ふるさと」最初の4小節

これは、高野辰之作詞、岡野貞一作曲で、小学校6年生の教科書に掲載されている(テンポは、『小学生の音楽6』から転記)。楽譜の最初に見られる $\frac{3}{4}$ が、4分の3拍子のことで、1小節の中に四分音符が3拍分の長さで、楽譜が構成されているという意味である。

そして、音楽の教科書には「早春賦」や「浜辺の歌」、「モルダウ」のように、 $\frac{6}{8}$ 拍子の曲も時々見ることができる。 $\frac{6}{8}$ を約分すると $\frac{3}{4}$ になるが、 $\frac{6}{8}$ 拍子の曲と $\frac{3}{4}$ 拍子の曲は、実は演奏する場面にリズムの取り方が異なる。図8は、筆者が思いついた節である。



図8 8分の6拍子の一例

図8を演奏する際は、6拍子でリズムをとらずに、音符の下に書かれた小さな数字のように、2拍子のようにリズムを刻んでいくのが一般的である。

以上、②と③から分かるように、数学での分数と音楽での拍子は、表記の仕方は同じであるが、意味に違いがある。例えば、算数・数学の $\frac{3}{4}$ は分割分数、割合分数、商分数などの意味で使われているが、音楽の拍子は、「4分音符「4」を分母に置き、それが1小節の中に3つ分入っていることを示す「3」を分子に置くことによって拍子を定義する」という意味で使われている。

④ピタゴラス音律についての話題

ピタゴラスは、「①音楽史に関する話題」でも登場しているが、ピタゴラスが発見した音のきまりについて、桜井(2010)を要約すると、以下のようになる。

ピタゴラスは、ある日、鍛冶屋から聞こえてくる様々な槌の音を聞くうちに、よく調和して響き合う音(協和音)があることに気がついた。それが、槌の重さに関係あることを突き止め、協和音の間に秘められたきまりを、自然数を使って解き明かした。

そして、桜井・坂口(2011)の中で、ピタゴラ

スが発見した、弦の長さと言程についての関係（ピタゴラス音律）の仕組みについての解説があったので、それを要約する。

ピタゴラスによると、「元の音」と「そこから1オクターブ高い音」との弦の長さの比は、1：2である。そして、違う音同士で最も協和する2つの音は、弦の長さが2：3のときである。これは、「ドーソ」の音程に相当し、完全5度の関係になっている。ドの完全5度上はソ、ソの完全5度はレである。

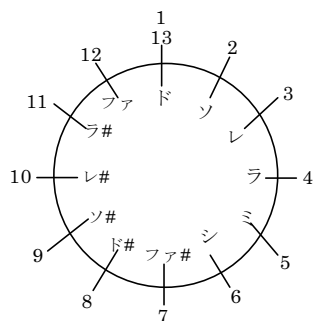


図9 サークル・オブ・フィフス

以下、同様に音を積み上げていくと「ドーソーレーラーミーシーファ#ード#ーソ#ーレ#ーラ#ーファード」の順番で、音階を構成している12種類の音すべてを巡って、再び元の音に戻る。

この5度の循環は、図9のように円で表すことができる。これを「サークル・オブ・フィフス」（5度円）と呼んでいる。

ジャズピアニストである中島氏は、中島(2012)の中で、この5度円について次のような解説をしている。

5度円で連続して並んでいる5個の音、例えばド・レ・ミ・ソ・ラだけを使った音階「ドレミソラ」は、世界各地の民族音楽の中に存在する重要な五音階です。これは、ジャズやポップスでは「ペンタトニックスケール」と呼ばれている、とても重宝されている五つの味わいのある音たちです。(中略)「赤とんぼ」や「夕焼小焼」を思い出してみましょう。たった5つの音「ドレミソラ」で作られているのです。

⑤平均律についての話題

一方、ある「ド」の音から1オクターブ高い「ド」までを12等分して作られた音階のことを「平均律」と呼んでいる。図10は、平均律で作られている、ピアノの鍵盤の一部である。ある「ド」から1オクターブ高い「ド」までは、白鍵が、全音、全音、半音、全音、全音、全音、半音の順に並び、88鍵が規則的に並んでいる。



図10 ピアノの鍵盤

平均律とピタゴラス音律の違いについて、桜井・坂口(2011)は、一覧表の形でまとめている。表2についての説明が記述されていたので、筆者なりに要約してまとめる。

まず、「平均律」の行にある数字は、「ド」の音から1オクターブ高い「ド」までを12等分してあるので、「ド」の音を「1」として、順に、2, 3, 4・・・のように番号が振られている。「ピタゴラス音律」の行にある数字は、図9で示した数字と同じで、「ド」の音を1とすると、その音は何番目に現れるかを示している。「ソ」「レ」「ラ」・・・の順に番号が振られている。そして、小数表記の列で最後が「2」ではなくて「2.027」となっているのには、次のような理由がある。ピタゴラスは、協和する完全5度を積み上げて、等比数列を作った。

ところが、13乗して計算していくと、2.02728652... と誤差が出てしまう。この0.27...を「ピタゴラスコンマ」と呼んでいる。

表2 平均律とピタゴラス音律の比較 (桜井・坂口、2011)

音名	ド	レ ^b (ド [#])	レ	ミ ^b (レ [#])	ミ	..	ド
音程	完全1度	短2度	長2度	短3度	長3度	..	完全8度
平均律	1	2	3	4	5	..	13
指数表記	1	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$..	2
小数表記	1	1.059	1.122	1.189	1.260	..	2
ピタゴラス音律	1	8	3	10	5	..	13
分数表記	1	$\frac{\left[\frac{3}{2}\right]^7}{2^4}$	$\frac{\left[\frac{3}{2}\right]^2}{2}$	$\frac{\left[\frac{3}{2}\right]^9}{2^5}$	$\frac{\left[\frac{3}{2}\right]^4}{2^2}$..	$\frac{\left[\frac{3}{2}\right]^2}{2^6}$
小数表記	1	1.068	1.125	1.201	1.266	..	2.027

(なお、上の表の数値に関しては、筆者が実際に関数電卓を使用して確かめてある。)

⑥楽譜に見られる数学 (その1)

ここからは、楽譜に見られる数学として、計算に関連した内容 (その1)、対称性に関連した内容 (その2) に分けて記述する。

ピアノの楽譜では、たびたび左手と右手のリズムは異なるが、多くの場合は、拍子の曲ならば右手でメロディーを弾きながら、左手は基本的に4拍子をベースにして伴奏が構成される。ところが、右手と左手でリズムが異なる曲もあり、別々に練習してから両手で合わせないと、演奏するのが難しい。その例として、2曲取り上げる。



図11 「幻想即興曲」最初の5～6小節

図11は「幻想即興曲」(ショパン作曲)(Wikipediaより引用)の最初の5～6小節目の部分である。左手で6つ分、音が進む間に、右手では8つ分の音が進む。これを6:8の比と考えれば、比を簡単にして3:4になる。筆者は、この曲を弾く前に、手と足を使って、左手で3回机を叩く間に、同時に右手で4回机を叩く練習を何度も繰り返し行った結果、この部分が弾きやすくなった。

よく「2拍3連」という言葉が用いられるが、これは、右手で2つ刻む間に、左手で3つの音を刻む曲である(右と左が逆の曲もある)。

また、『マイクロコスモス 第6巻』(バルトーク作曲)の中にある「ハエの日記から」という曲は、第76小節目から、複雑なフレーズが登場する。

左手の1フレーズが12音ずつになっているのに対して、右手の1フレーズは8音ずつで構成されている。8と12の最小公倍数は24なので、♪(八分音符)で24個分、曲が進んだところで、左手と右手のフレーズがぴったりと揃う。

上記の2曲は、音楽と最小公倍数が関連した事例といえる。

⑦楽譜に見られる数学 (その2)

一方、『マイクロコスモス 第1巻』(バルトーク)の中に、「反行(はんこう)(鏡)」というタイトルの曲が見られた。これは、右手と左手の動きが、完全に対称になっている(楽譜の著作権については、編曲者である本人の了解を得ている)。



図12 反行(鏡)(マイクロコスモス1より)

左手と右手が、同じリズム（二分音符+四分音符+四分音符+・・・）で進行しながら、右手のフレーズが上昇すれば左手のフレーズは下降し、右手が下降すれば左手は上昇している。

この曲を実際にピアノで弾いてみると、ピアノの鍵盤上の左手の「ソ」の音と右手の「ラ」の音の間に、まるで鏡を置いて演奏しているように見えるので、筆者はこのようなタイトルがついたのだろう、と考えた。

そこでさらに筆者は、左手のフレーズを全体的に下げること、図13のように、譜面の見た目でも完全に「対称な形」に見えるような楽譜を考えてみた。



図13 図12の左手を変えた楽譜

右手のラの音が、五線譜の下から2本目と3本目の間に描かれているので、左手の音は、上から2本目と3本目の間に置いてみた（以下、同様に音を並べていく）。

実際にピアノで弾いてみたところ、「シ」と「ド」の音は両手で同じで、「ソ」と「レ」は五度の関係にある音なので、特に違和感なく聞こえた。

実は「パガニーニの主題による狂詩曲」の中にも、図12のような動きが見られる。この場合は右手と左手の動きが対称になっているのではなく、第1変奏と第18変奏の主題が、対称の動きをしている（譜面については割愛する）。

⑧三角関数に関連した話題

中島（2012）は、私たちの身のまわりにある音について、数学の三角関数と結びつけて、以下のように述べている。

ちなみに、音の種は何でしょうか。実は、音の種は、かの三角関数なのです。皆さんは、

三角関数を覚えていますか？大人の方ならば、なんとなく、悪戦苦闘した日々を思い出すのではないのでしょうか。（中略）例えば、ピアノやギターで「ド」の音を鳴らしてみましょ。すると、その音には無数の三角関数が混じり合っていて、その混じり合い方の違いが、「音色」の個性として、私達の耳に響くのです。

確かに、楽器の種類によって音の聞こえ方が違うので、それが三角関数の波形の違いとなって現れるものと考えられる。

⑨ピアノを演奏する数学者

最後に、数学のノーベル賞にあたるフィールズ賞を受賞した2人の数学者の話題に触れて、締めくくりにする。

小平邦彦氏は、1954年に日本で初めてフィールズ賞を受賞した数学者である。小平（2002）によると、中学2年の頃にピアノを習い始めて、ピアノの先生を変えながら、ベートーヴェンのピアノソナタや、ショパンのバラードなどを弾いていたという。

一方、広中平祐氏は、1970年に日本で2番目にフィールズ賞を受賞している。

小澤・広中（1984）の中で、広中氏と指揮者の小澤征爾氏が対談を行っている。このような会話のやり取りを見つけたので、引用する。

米国で二人が会食をしていた時のことである。

「小澤さんにね、ひとつプレゼントがあるのだけどね」

音符がメモ用紙に書かれている。

「なにこれ？歌みたいだけど・・・」

「実はね、これは『モシモシ カメヨ』なのよ。

それをね、ぼく流に逆から書いたの」

著作権の関係で、広中氏の書いた楽譜は割愛するが、そこにはハ長調の「ウサギとカメ」の上下を逆さまにして、ト音記号に直した楽譜が書かれている。筆者はすぐに、項目⑦に出てきたバルトークの「反行（鏡）」の手法と結びついた。図12で下段に当たる部分が「ウサギとカメ」の元のメロディーとすると、反転させて上段にした楽譜を、

広中氏が書いて小澤氏に渡したのである。

5. 考察

前節では、先行研究や書籍をまとめながら考察を加えてきた。ここでは全体的な考察を行う。

①先行研究からの考察

論文を検索した際のキーワードからも分かるように、「ピタゴラス音律」という語が度々現れた。

ピタゴラスは、弦の長さや音程との間にきまりがあることを発見した。そして現在、多くの教員が、当時の追体験という形で生徒と共に計算を行い、ストローや紙笛で「ピタゴラス音律」を作り、数学と音楽を関連づけて実践している。

また、ギターの弦を使った実践授業からも読み取れるように、身のまわりにある題材を使って、弦の長さや音程の関係を考えることが可能である。小学校算数科の目標にある、「算数で学んだことを生活や学習に活用しようとする態度を養う」や、中学校数学科の目標に「数学を生活や学習に生かそうとする態度を養う」のに適した題材といえそうである。

ピタゴラス音律と並んで、平均律も音楽では欠かせない重要な要素である。実践授業では、相似の応用や作図の活動を通して、生徒が当時の計算を追体験している。算数・数学と関連した歌は、現在では九九の歌、円周率の歌など、ユーチューブで手軽に聞くことが可能である。

このように算数・数学と音楽は、ピタゴラス音律、平均律、数え歌などを中心に深い関係があるといえる。

②書籍からの考察

「楽譜の中に現れる算数・数学」といえば、最も基本的なのは $(1拍) + (1拍) = (2拍)$ といった計算であろう。しかも、ライブニッツによると、意識して計算している訳ではないということであった。また、バルトークやパガニーニの楽譜に見られるように、音符のフレーズの形から「図形の対称性」の話題と結び付けて授業を行うことが可能である。そして、高等学校で扱う三角

関数も、それらが複数重なり合って、身のまわりの音を創り出していることに関して、三角関数の単元の終わりに、応用・発展として位置づけることができる。

フィールズ賞を受賞した2人の数学者（小平氏、広中氏）は、ピアノをこよなく愛した方々である。広中氏が小澤氏に渡した「ウサギとカメ」の楽譜を「反転」させた曲を書いていたところは、いかにも数学者という趣きがある。

6. 知見と今後の課題

本研究から得られた知見は、以下の3点である。

- (1) ピタゴラス音律や平均律は、算数・数学と音楽に関連している話題として、音程と弦の長さを計算して楽器を作るような活動を通して、追体験が可能であること。
- (2) 楽譜の中で、音符を用いた計算やフレーズの読み取り、リズムの変化などについて、トピック教材として扱うことが可能であること。
- (3) 紀元前ギリシャ時代のピタゴラスをはじめとする偉大な数学者から21世紀の現在に至るまで、数学者の中には、算数・数学と音楽とを結び付けて考えたり、自ら楽器を演奏したりする人物がいたこと。

今後の課題は、以下の2点である。

- (1) 先行研究に見られた実践授業は、小学校・中学校・高等学校で行われたものであった。将来教員を目指す大学生自身が、算数・数学に興味を持てるように、ピタゴラス音律などの追体験を通して、算数・数学と音楽とは関連性が深いことを実感できるようにすること。
- (2) 本研究では、算数・数学と音楽との関連について考察したので、音楽以外の教科についても考察を行うこと。

【引用・参考文献】

- 江山静海 (2006) 「科学系博物館における「ピタゴラス音律」を用いた演示」『日本数学教育学会誌 臨時増刊 第88回総会特集号』 p.420
- 蓮沼秀昭 (2004) 「音階の作り方みる数学：ギ

- ロシア時代の道具, Mesolabio を用いて」『日本数学教育学会誌 臨時増刊 第86回総会特集号』, p.360
- 伊禮三之 (2007) 「音楽と数学: 有用性の実感を促す数学的問題解決の図式による授業」『第40回数学教育論文発表会論文集』, pp.139-144
- 木村勇三 (1991) 「数学を楽しく学ぶ一つの工夫: 数学数え歌」『日本数学教育学会誌 数学教育第73巻第9号』
- 小平邦彦 (2002) 『ボクは算数しか出来なかった』, 岩波書店, pp.46-50
- 教育芸術社 (2018) 教科書『小学生の音楽 3』, p.63
- 教育芸術社 (2018) 教科書『小学生の音楽 6』, p.38
- 教育芸術社 (2018) 教科書『高校生の音楽 1』, p.60
- 文部科学省 (2018) 『小学校学習指導要領解説 音楽編』, p.9
- 文部科学省 (2018) 『小学校学習指導要領解説 算数編』, pp.21-22, p.29
- 文部科学省 (2018) 『中学校学習指導要領解説 数学編』, p.20
- 中島さち子 (2012) 『人生を変える「数学」そして「音楽」』, 講談社, pp.58-59, p.204
- 中村誠 (2006) 「音階の秘密を探ろう: 自作モノコードを用いてピタゴラス音階を作る」『日本数学教育学会誌 臨時増刊 第88回総会特集号』 p.420
- 日本数学教育学会(編) (2010) 『数学教育学研究ハンドブック』, 東洋館出版社
- 小倉由詩 (2009) 「音楽と数学を結びつけた教材研究: ピタゴラス音階を用いて生徒に驚き・感動を与える指導を通して」『第42回数学教育論文発表会論文集』, pp.853-854
- 小澤征爾・広中平祐 (1984) 『やわらかな心をもつ』, 新潮社, p.13
- 坂口博樹 (2016) 『数と音楽』, 大月書店, pp.41-43
- 桜井進 (2010) 『面白くて眠れなくなる数学』, 株式会社 PHP 研究所, pp.98-99
- 桜井進・坂口博樹 (2011) 『音楽と数学の交差』, 大月書店, pp.54-59
- 白川嘉子 (2004) 「ピタゴラス音律にみられる数学を題材とした授業研究: モノコードの追体験を通して」『日本数学教育学会誌 臨時増刊 第86回総会特集号』, p.563
- 末吉保雄・パップ晶子(編), バルトーク (2008) 『マイクロコスモス1』, 音楽之友社, p.13
- 末吉保雄・パップ晶子(編), バルトーク (2008) 『マイクロコスモス6』, 音楽之友社, p.17
- 武田豊 (2007) 「累乗根の奏でるギター音楽」『日本数学教育学会誌 臨時増刊 第89回総会特集号』 p.375
- 山下昭 (1980) 「数学科と他教科との関連」『日本数学教育学会誌 第62回総会特集号』, p.281

【謝辞】

本稿を作成するにあたって、先行研究の検索にご協力頂いた日本数学教育学会事務局の齋藤年恵氏、松本恵理氏に謝意を表します。

また、ご指導・ご助言を頂いた鎌倉女子大学の田中弘樹教授、パップ晶子教授、渡辺宏章准教授に謝意を表する次第です。

要旨

本研究では、算数・数学と音楽に関連した先行研究や書物を通して、どのようなことが論じられているのかを明らかにするとともに、算数・数学と音楽が、どのような場面で活かされているのか考察した。

その結果、ピタゴラス音律や平均律等が算数・数学と深く関連していることや、音符の計算やフレーズの読み取り、リズムの変化等について、トピック教材として扱うことが可能であることが明らかになった。

今後の課題は、学生自身が算数・数学に興味を広げて指導できるように、ピタゴラス音律などの追体験を通して、算数・数学と音楽との関連性について実感できるようにすること。また、算数・数学と音楽以外の教科との関連で考察を行うことである。(2018年9月7日受稿)