

## 図形概念の変化を促す指導法の検討

——中学校第2学年の単元「三角形と四角形」を事例として——

橋本 吉貴 (児童学科・講師) ・ 高垣 マユミ (児童学科・教授)  
三島 一洋・工藤 吉猛 (鎌倉女子大学中・高等部教員)

### **Study of a teaching method promoting a change in the concept of geometrical figures:**

### **Taking as an example the Junior High School 2nd year unit, “Triangles and Quadrilaterals”**

Hashimoto, Yoshitaka ・ Takagaki, Mayumi  
Mishima, Kazuhiro ・ Kudou, Yoshitake

#### **Abstract**

In this research, we designed a teaching plan consisting of a total of seven hours with regard the unit “Triangles and Quadrilaterals” for 36 Junior High School students, in which a hypothesis was formed before and after the instruction, through practice with geometrical domains, to alter the students' concept of the classification method of triangles entities.

Up to now, in preceding research dealing with the theme of geometrical figures, investigation has been made into guidance aimed at rearing developmental reasoning as well as promoting the use of teaching tools intended to cultivate inductive reasoning and deductive reasoning. With this as background, this research endeavours to introduce some novel points concerning the problem of the classification of triangles entities. Many students do not just use their perception of the length of the sides or the size of the angle to make a judgment, but also because of the emphasis placed on the conditions for congruent triangles every lesson, they tend to classify by placing the four types of triangles into the same bundle. This research has as its distinguishing feature the hypothesis that it is possible to promote a change in the presently maintained concept of geometrical figures.

**Keywords :** the classification method of trilateral entities, the conditions for congruent triangles, a changing concept of geometrical figures

**キーワード :** 三角形の分類方法, 三角形の合同条件, 図形概念の変化

## 1. 研究の意図・目的

近年、わが国で相次いで実施されている様々な国際的調査（国際数学・理科教育動向調査（IEA/TIMSS, 2003）；生徒の学習達成度調査（OECD/PISA, 2003））等の結果を概観し、わが国における数学教育の問題点を明らかにした上で、本研究において探究すべき課題を検討することにする。

2003年に「OECD生徒の学習到達度調査2003年調査」（以下、PISA2003）と「国際数学・理科教育動向調査2003年調査」（以下、TIMSS2003）が実施された。PISA2003は、『生きるための知識と技能② OECD生徒の学習到達度調査（PISA）2003年調査国際結果報告書』（国立教育政策研究所編、ぎょうせい、2004）で報告されている。義務教育修了段階の15歳児を対象に行われ、読解力・数学的リテラシー・科学的リテラシーについて測定された。

この中で、教師を対象にした数学の指導法の調査として、教科書中心・作業中心・問題解決・オープンエンドなど13種類の指導法について、評価（よい方法だと思うか）と実施頻度（いつも又はしばしば行う）についての調査が行われた。その結果オープンエンドについての評価は76%と高かったが実施頻度は16%と非常に少なかった（室岡、2006）。

すなわち、PISA2003から見出されたわが国における数学教育の問題点としては、オープンエンドの問題のように答えが多様に存在するような問題に対しては高く評価がなされているものの、授業時間数の問題や教材研究の難しさなどの理由から授業で取り上げられる機会が非常に少ないことである。その結果、数学の問題を広く捉えたり深く考えられるような時間が不足していることが挙げられる。

一方TIMSS2003は、『TIMSS2003算数・数学教育の国際比較 国際数学・理科教育動向調査の2003年調査報告書』（国立教育政策研究所編、ぎょうせい、2005）で報告されている。小学校4年生及び中学校2年生を対象に、初等中等教育段階における教育到達度と児童生徒の学習環境条件の

諸要因との関係を測定したものである。

当該調査では数学の調査問題と同時に生徒質問紙も実施されている。生徒質問紙の結果から、教師が説明したことを覚えて練習するだけの授業ではなく、「自分の答えを説明する」という質問に対する日本の反応率は、中学校で31.6%（国際平均値66.6%）となっており国際平均を35%も下回っている（重松ほか、2006）。

すなわち、TIMSS2003から見出されたわが国における数学教育の問題点としては、知識・理解や表現・処理といった、式と答えを記述すれば即ち得点につながる問題については反復練習などで身につけていくことが可能であるが、数学的な考え方をを用いて自分の考えを論理的に記述するような問題は、教師の指導にも大きく関わってくる問題点である。

これら2つの国際調査の結果から見出された問題点を集約すると、

- ① 1つの固定観念に縛られ、多様な考え方ができない。
- ② 数式や証明を論理的に組み立て表現できるような子どもを育成する指導法が不十分である。

ということがわが国における数学教育の問題点として浮かび上がってくると言えよう。

そこで、本研究では数学の問題は答えが必ずしも1つではないことを生徒が理解すると同時に、自分の答えを論理的に記述できる能力を育成する必要性が考えられる。翻って、図形に特定して検討を行うと、図形領域における論理的思考力の育成については『中学校学習指導要領』（1998）の第3節、数学の第2学年の内容についての記述の中で「平面図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめ、論理的に考察する能力を養う」と述べられており、図形について生徒が定義に沿って論理的に捉えられるような指導も大切であると考えた。

以上の議論を踏まえて、本研究の目的は、次の2点に集約できる。

- (1) 図形の題材を扱った先行研究のレビューを踏まえ、従来から十分には検討が行われて

いない課題を取り上げ、生徒たちの図形概念の変化が促されるような指導内容を検討する。

- (2) (1) で考えた単元について、図形領域における具体的な学習指導案を作成し提案する。

## 2. 図形領域の指導に関する先行研究と本研究の意義

### (1) 図形領域における先行研究のレビュー

図形領域における論証に関する先行研究には、以下に示すような論文が見られる。教科書の流れに沿った指導から脱却し、如何にして証明の必要性を生徒に指導するかがポイントである。数学教育において推論は「数学的な考え方」として肝要なものである。

- ①国宗 (2000) の研究では、平行四辺形の認知ということについて、

段階Ⅰ：図形の性質を証明するのに、実験・実測による方法でも十分であると考えている段階

段階Ⅱ：演繹的に証明しなければならないことの意味を理解している段階

段階Ⅲ：大局的 (体系的) な意味も理解して証明できる段階

の3つの段階を設定して調査を行ったところ、結論の1つとして、中1から中2にかけての時期がほかの学年に比べて段階ⅠからⅡへの移行が顕著であることが明らかになった。

- ②岡崎 (1997) の研究では、平行四辺形・ひし形・長方形・正方形という4種類の四角形について生徒の思考の順序についての分析を行ったところ、「ひし形ならば平行四辺形」→「正方形ならばひし形」→「長方形ならば平行四辺形」→「正方形ならば長方形」(いずれも逆は不成立) という順序で四角形の相互関係が理解されていくことが明らかになった。この順序は教材を提示する順序に生かされることが示唆された。

- ③長谷川ほか (2004) の研究では、図形の論証問題について仮定や結論、証明で使う定理などを記号で表したもの (コンセプトマップと

呼んでいる) を描けるように指導することが有効であることを示唆している。

### ④帰納的な考え方を育てる指導

関 (1991) の研究では、図形の論証能力を高めるための授業展開として、三角形の内角の和 $180^\circ$  から  $n$  角形の内角の和 $180^\circ \times (n - 2)$  を求める問題において、三角形・四角形・五角形…の内角の和を表にすることで一次関数になることや、外角を定義して考えるなどの、教科書以外の展開を授業の中で扱っている。 $n$  角形の内角の和を求める問題は、小学校の図形領域における発展の事例としても扱われている (文部科学省, 2002a)。

### ⑤演繹的な考え方を育てる指導

平岡編 (2001) の図形領域における論理的な考え方の1つとして挙げられている。

例えば、既に得られている「三角形の3つの角の和は $180^\circ$  である」ことに基づいて、その根拠を明らかにして四角形や五角形の角の和を求める際などに使われる。

### ⑥発展的な考え方を育てる指導

『個に応じた指導に関する指導資料』(文部科学省, 2002b) の事例2で、中学校第3学年の単元「三平方の定理」の応用の事例として挙げられている。直径10cmの円柱4本にひもを巻いたときの周囲の長さを求める問題を原題として、円柱の本数を5本、6本…と増やすことによって発展的な問題ができる。

### (2) 本研究の意義

以上①～⑥に示すように、これまでの図形の題材を扱った先行研究では、帰納的な考え方・演繹的な考え方・発展的な考え方を育てる指導などが研究されている。こうした先行研究の中で本研究の意義は、帰納的な考え方の観点からは「生徒それぞれが描いた二等辺三角形は大きさが異なっても一般的な二等辺三角形といえる」ということを指導することによって、正三角形や直角三角形でも同じことが成り立つ、という考え方を育成したいと考える。

また、演繹的な考え方の観点からは「ある観点

で考えると、4種類の三角形は同じくくりで考えることが可能になる、ということを指導することによって、図形に対して多面的に考える力を育成したいと考える。

そして、発展的な考え方の観点からは、「二等辺三角形からほかの図形に変わったら、今まで成り立っていたことはどのように変化するか」ということが考えられるような指導をする。そのことによって、数値・形・場面等の「問題の構成要素」が変わったときに今まで成り立っていたことはどのように変化するか、という考え方を育成したいと考える。

具体的には、三角形の分類の問題について、多くの生徒が着目する「辺の長さや角の大きさによる分類」以外に、三角形の合同条件を毎時間強調することによって、「4種類の三角形を同じくくりで考える分類」へと視点が移動することによって、帰納的な考え方・演繹的な考え方・発展的な考え方を育て、これまで保持していた既成の図形概念の変化を促すことが可能になるという仮説を立て、中学校2年生の数学単元「三角形と四角形」を題材に具体的な指導案を作成し、提案するものとする。

### 3. 学習指導案（全7時間）の作成

単元：三角形と四角形，対象：中学2年生36名

#### （1）第1時

- ①事前テストとして、次のFig3.1に示すような三角形の分類の問題を提示する。

生徒の予想される回答例：

直角があるか否か（直角三角形と二等辺・正三角形）

常に線対称か否か（二等辺・正三角形と直角三角形）

鈍角三角形になることがあるか否か（二等辺三角形と正三角形・直角三角形）

- ②二等辺三角形の性質として「二等辺三角形の底角は等しい」（定理1）を証明する。

#### （2）第2時

- ①「二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分する」（定理2）を証明する。

- ②「二等辺三角形になるための条件」を考えるにあたって、逆という概念を学ぶ。

#### （3）第3時

- ①「底角が等しい三角形は二等辺三角形」（定理1の逆）を証明する。

- ②2つの二等辺三角形の合同に関する証明も一般の三角形と同じく三角形の合同条件で示すことができた。このことから、三角形の合同条件で示すことができるという視点に立てば、二等辺三角形と一般の三角形は、同じくくりと考えることができることを強調する。

#### （4）第4時

- ①「正三角形の3つの角は等しい」（定理3）を証明する。

- ②「3つの角が等しい三角形は正三角形である」（定理3の逆）を証明する。

- ③2つの正三角形の合同に関する証明も一般の三角形と同じく三角形の合同条件で示すことがで

#### 【事前テストの問題】

三角形を分類して下さい。また、何故そのように分類したのか理由も書いて下さい。

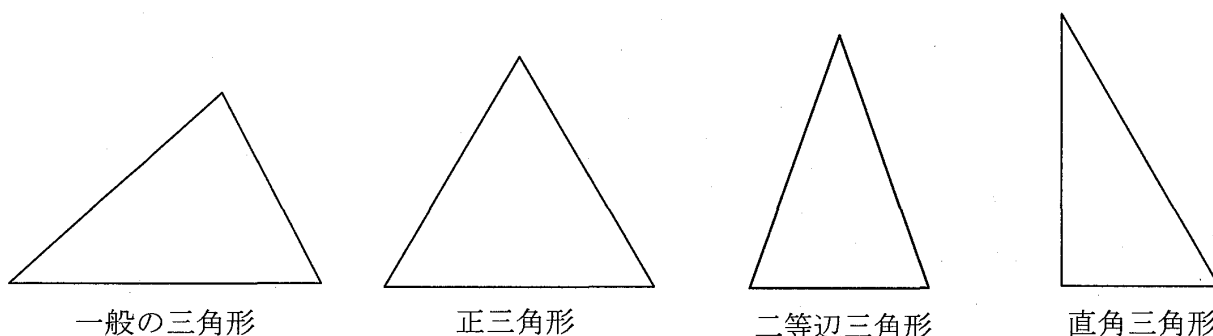


Fig 3.1

きた。このことから、正三角形と一般の三角形、二等辺三角形は、三角形の合同条件で示すことができるという視点に立てば、同じくくりと考えることができることを強調する。

(5) 第5時

2つの直角三角形について合同条件を模索させ、下記の2つの事柄を導く。

(定理1) 斜辺と1つの鋭角が等しい。

(定理2) 斜辺と他の一辺が等しい。

(6) 第6時

①『中学数学2』(教育出版) p.119例1を三角形の合同条件、直角三角形の合同条件を使って解く(後述のFig4.2を参照)。

②2つの直角三角形の合同に関する証明も一般の三角形と正三角形、二等辺三角形と同じく三角形の合同条件で示すことができた。このことから、三角形の合同条件で示すことができるという視点に立てば、直角三角形と一般の三角形は、同じくくりになると考えることができることを強調する。

③問題に応じて、三角形の合同条件だけでなく二等辺三角形・正三角形・直角三角形の性質を適切に用いることで、証明がより簡潔にできるということを強調する。

(7) 第7時

①第1時から第6時までの学習を通して、2つの二等辺三角形・正三角形・直角三角形の合同を証明するのに、いずれも三角形の合同条件を用いた。

このことから、小学校段階で学んだ「3本の線分で囲まれた図形」という視点で三角形をくくる以外に、「三角形の合同条件を利用することができる図形」という視点で三角形をくくる視点が獲得され、これまで保持していた図形概念の変化を促すことが可能になることが予測される。事後テストを実施することによって結果が明らかになる。事後テストの問題は第1時で実施した事前テストの問題と同一のものを使用する。

②視点を問う問題「イスラエル対レバノンの紛争とマグロ高騰との関係について」の問題の解説

をする。この問題は一見、関係のない2つの事象が視点を変えることで関連付けることができるといった視点の変化を見る問題であると同時に、この問題を通じて数学が実生活・実社会においてどのように働き、どのような場面で役に立つのかという有用性を示すための一つの例でもある。このことは、数学的な抽象世界と日常世界の乖離をつなぎ、生徒たちに数学を学ぶ意義を考えさせるという点を目的とした問題でもある。

#### 4. 本単元の従来の学習指導案と比較した独創的な点

##### (1) 生徒の実態

全体的に学習する態度は整っているが、数学を苦手になっている生徒も多く自己効力感も低い。集中力に欠け思考活動を嫌う傾向にあるが、授業時に成功体験をすることで苦手分野に興味を示し、思考活動にも参加をすることもある。また活発に疑問・質問を発言する中で、数学学習に対する意義を模索する発言も聞かれ、数学に対する学習意欲を育成する際に数学学習の意義を示すことは重要と思われる。以上の実態から、本研究で開発した学習指導案は、物事に対する視点の変化を意識させ数学学習の意義を示し、数学に対する学習意欲を育成する上で効果があることが予想される。

##### (2) 本単元の従来の学習指導案と比較した独創的な点

『中学校学習指導要領解説 数学編』(1999)の第3節に見られる数学科の目標には、「数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさ、数学的な見方や考えのよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる」とある。

実際、従来の学習指導案や指導書を調査すると、生徒の興味・関心を引くことや知識の習得を目的とした様々な工夫がされているが、単元ごとに学んだ種々の知識が具体的に実生活・実社会におい

てどのように働き、どのような場面で役に立つのかという有用性が記されておらず、個々の教員の裁量に依存するケースが多いことを指摘したい。

また、各単元で学んだ知識の有用性については、授業中においても生徒たちから質問される事柄であり、数学を学ぶ意味を間違えている、または意味を見出せないでいる生徒の存在も少なくないことは事実である。本研究では、三角形の分類に関する視点の変化に重点を当てて授業計画を試みた。特に三角形の分類に関する視点の変化を促す教材として、Fig4.1に示すような設問を教科書の問題とは別に数問設定した。

本問を設定することにより、二等辺三角形に関する知識的理解の確認だけでなく、2つの二等辺三角形の合同を示す際にも三角形の合同条件を利用することができる、という視点を強調することが可能となり、三角形の分類に関する視点の変化を促すことに繋がると考えられる。また、同様な設問を2つの正三角形の合同に関しても設定した。更に、教科書にある直角三角形の合同に関する設問についても別解という形式で、三角形の合同条件を利用することができるという視点を強調可能な解答Fig4.2を提示する。

最終時では、視点の変化を問う問題として「イスラエル対レバノンの紛争とマグロ高騰との関係を答えなさい」というようなオリジナルの問題を提示したい。一見関連性がないように見える2つの事柄であるが、イスラエルとレバノンが石油の産出国であることと、マグロ漁には大量の燃料が必要であることから、「紛争」と「高騰」から「石油」に視点を変化させることで両者の関連性が認識可能となる。こうした問題を挿入し、三角形の分類に関する視点の変化は、実社会や実生活にどのような有用性があるか、ということについても具体的な例を挙げて説明する。このことは、数学的な抽象世界と日常世界の乖離をつなぎ、生徒たちに数学を学ぶ意義を考えさせるという点で、大きな価値が見出せる。

最後に、本研究では中学校の図形領域での単元「三角形と四角形」に焦点を当て、従来の研究では行われていない独創的な指導計画を立案した。本研究で立てた仮説に基づき、今後は研究授業の実施へと準備を進め、実際に研究授業を遂行し、中学生の図形に対する既成の概念の変化を促せるか否かを検討していきたいと考える。

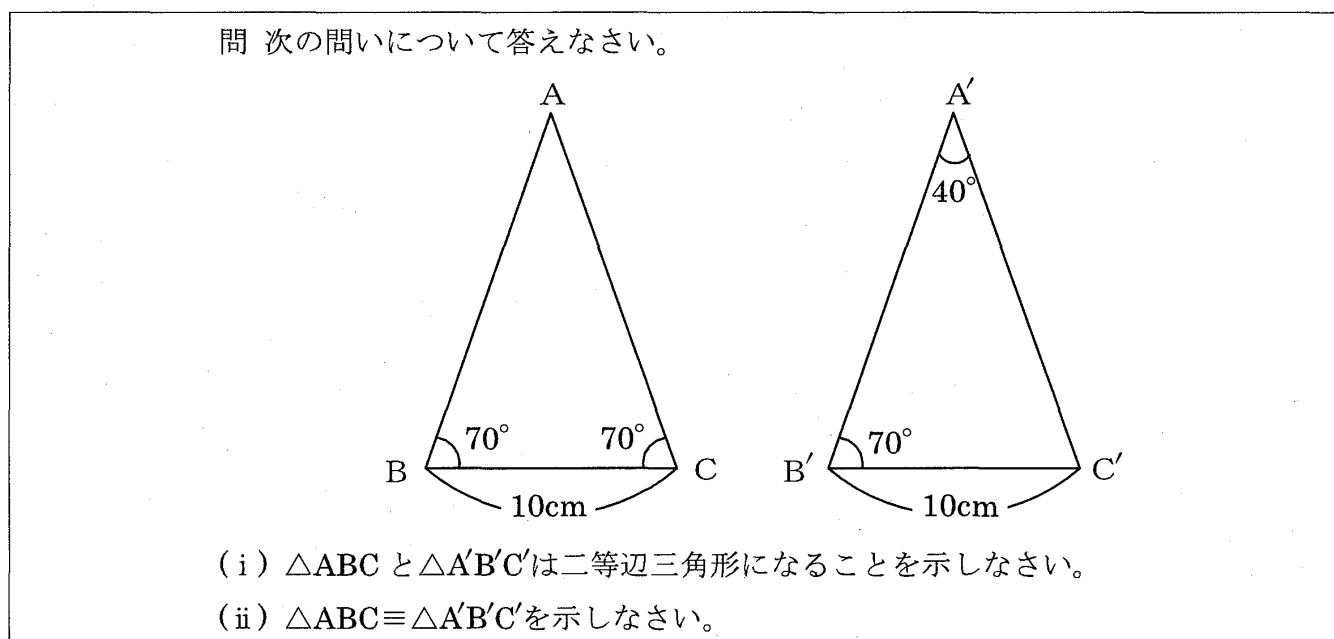
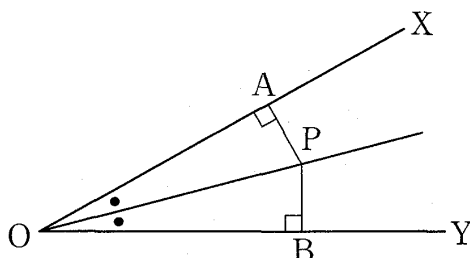


Fig 4.1

問  $\angle XOY$ の二等分線上の点  $P$  から  $OX$ ,  $OY$  に垂線をひき、交点をそれぞれ  $A$ ,  $B$  とする。このとき,  $PA=PB$  であることを証明してみよう。



(別解)

$\triangle POA$  と  $\triangle POB$  について、

$\angle POA = \angle POB$  (仮定) - ①

$\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$  (仮定) - ②

三角形の内角の和が  $180^\circ$  であることと ①, ②より

$\angle APO = \angle BPO$  - ③

$PO = OP$  (共通) - ④

①, ③, ④より 1 辺両端角相等であることから

$\triangle POA \equiv \triangle POB$

したがって

$PA = PB$

Fig 4.2

# 【参考文献】

- 長谷川勝久・三輪道正, 「コンセプトマップと解析的思考を用いた図形の論証指導」, 『日本数学教育学会誌 数学教育』第86巻第3号, 2004, pp.2-12.
- 平岡忠 (編), 『小学校算数科指導の研究』, 建帛社, 2001, p.151-152.
- 国立教育政策研究所 (編), 『生きるための知識と技能 ② OECD生徒の学習到達度調査 (PISA) 2003年調査国際結果報告書』, ぎょうせい, 2004
- 国立教育政策研究所 (編), 『TIMSS2003算数・数学教育の国際比較 国際数学・理科教育動向調査の2003年調査報告書』, ぎょうせい, 2005
- 小関熙純・国宗進 (編), 『「よい授業」の創造と展開』, 明治図書, 1999, pp.119-144.
- 国宗進, 「図形の論証に関する理解度の変化」, 『日本数学教育学会誌 数学教育』第82巻第3号, 2000, pp.2-12.
- 教育出版, 『中学数学2』, 平成18年度版, pp.108-119.
- 文部省, 『中学校学習指導要領』, 1998, p.39.
- 文部科学省, 『個に応じた指導に関する指導資料－発展的な学習や補完的な学習の推進－』(小学校算数編) 事例10, 2002a, pp.93-98.
- 文部科学省, 『個に応じた指導に関する指導資料－発展的な学習や補完的な学習の推進－』(中学校数学編) 事例2, 2002b, pp.80-90.
- 室岡和彦, 「中学・高校数学の改善に向けて－調査結果等から学ぶもの－」, 『日本数学教育学会誌 数学教育』第88巻第7号, 2006, pp.16-22.
- 岡崎正和, 「子どもの理解に基づく教材構成に関する研究 (1)－四角形の相互関係の共通概念経路を中心として－」, 第30回数学教育論文発表会論文集, 1997, pp.391-396.
- 関茂夫, 「論証能力を高めるための授業展開－中学2年生 図形指導における－」, 第24回数学教育論文発表会論文集, 1991, pp.157-162.
- 重松敬一, 相馬一彦, 杢元新一郎, 「PISA2003,

TIMSS2003 質問紙調査からみた今後の算数・数学教育の課題」,『日本数学教育学会誌 数学教育』第88巻第1号, 2006, pp.32-37.

## 要旨

本研究では,図形領域での実践を通して,指導の前後における生徒の「三角形の分類方法についての概念の変化」について仮説を立て,中学校第2学年の生徒36名を対象に「三角形と四角形」の単元において計7時間の授業の学習指導案を立案した。

これまでの図形の題材を扱った先行研究では,帰納的な考え方・演繹的な考え方を育てる指導,教具を活用した指導,発展的な考え方を育てる指導などが研究されている。こうした中で,本研究の新規な点は,三角形の分類の問題について,多くの生徒が着目する「辺の長さや角の大きさによる分類」以外に,三角形の合同条件を毎時間強調することによって,「4種類の三角形を同じくくりで考える分類」へと視点が移動し,これまで保持していた図形概念の変化を促すことが可能になるという仮説のもとに,指導案を作成した点に特徴がある。

(2006.10.30 受稿)