

図形の敷き詰めに関する一考察

——鎌倉女子大学における授業実践を通して——

橋本 吉貴 (児童学科・講師)

Study on Tessellation through University Classroom Practice by Myself

Hashimoto, Yoshitaka

Abstract

I discuss the meaning of tessellation from a mathematical point of view through classroom practice for the University freshmen. Students made tessellation as an example of mathematical activities. I proved a proposition that congruent triangles or congruent quadrilateral can tessellate on a two-dimensional plane completely. They could certainly understand the proposition by making their own tessellation. It suggests that making tessellation in mathematics teaching is valuable for mathematical activities.

Key words: tessellation, mathematical activity, mathematical classroom practice

キーワード: 図形の敷き詰め、算数的活動、算数科での実践授業

1. 問題と目的

現行の学習指導要領(平成14年施行)では、小学校算数科の目標として新たにつけ加えられた文言の中に「算数的活動」「活動の楽しさ」というものが見られる。これは、従来の教師主導型の授業から脱却し、児童中心つまり受動的な授業から能動的な授業へと転換していくことを目指している。算数的活動については『小学校学習指導要領解説 算数編』(1999)の中で次の8つに分類されている。

作業的な算数的活動, 体験的な算数的活動,
具体物を用いた算数的活動,

調査的な算数的活動, 探究的な算数的活動,
発展的な算数的活動, 応用的な算数的活動,
総合的な算数的活動

作業的な算数的活動は「手や身体などを使って、ものを作るなどの活動」、そして、体験的な算数的活動は「教室の内外において、各自が実際に行ったり確かめたりする活動」とある。作業的・体験的な算数的活動を授業の中に採り入れることによって、算数の楽しさやよさが感じられるものになることが考えられる。

しかし、現在現役の大学生は現行の指導要領の下での教育を受けてきておらず、大学の講義の中

で実施した算数のイメージについての質問紙調査でも算数を「計算練習を中心に置いた教科」「紙と鉛筆を使った机上だけで学習する教科」と回答している学生が多い。

計算練習や机上だけでの学習も算数的な要素としては確かに重要なものであるが、それだけの活動から子どもの創造性を育んだり、発展的な考え方を伸ばしたりしていくのは、困難なことである。

「発展的な考え方」の育成に関連する内容については、外国の文献の中でも取り上げられている。問題づくりの指導としてNancy A. Gonzales (1996) は、始めの問題設定と子どもがつくる問題との関連性について考察を行っている。また、Voigt (1995) は教室文化の中で教師と生徒、または生徒同士の相互作用を通して、生徒の個人的な活動では見られなかった知識や概念が生み出されることについて「創発」という用語を用いて考察を行っている。

そこで、将来小学校の教師或いは保育士を目指している学生が作業的・体験的な算数的活動を経験することによって、従来受けてきた算数についてのイメージを払拭し、算数は机上での学習に限定しない、楽しくて発展性のある教科であることを自分自身で実感することが、将来教壇に立ったときに有効であると考えた。そのような根拠で、私は本学に赴任した平成16年4月より、児童学科1年生の学生を対象にした「算数①」の講義の中で算数的な作業を取り入れた活動を積極的に導入してきた。

図形の敷き詰め模様をつくる活動は、小学校算数教科の教科書では、第4学年の単元「三角形と角」(大日本図書、2005)の単元末に二等辺三角形と正三角形の敷き詰めが現れる。

その指導のねらいとして、

この指導のねらいは、形も大きさも等しい二等辺三角形や正三角形を敷き詰める活動から、それらの図形で平面を敷き詰めることができることに気づいたり、敷き詰めた図形の中に四角形や六角形を認めたり、図形の美しさを感じたりするなど、図形についての見方や感覚を豊

かにしていくことにある(文部省、1999)。と述べられている。平行四辺形と台形、ひし形については第5学年の単元「いろいろな四角形」(大日本図書、2005)の単元末に現れる。

小学校における実践研究の事例としては、例えば伊藤(2004)の中に見られる。任意の四角形が平面を敷き詰められる理由について考えたあとで、1組の平行な辺をもつ五角形や2組の等辺のなす角がともに 90° の五角形の敷き詰めへと発展的な学習を行っている。

また、敷き詰めの代表的な作品としては、オランダの画家であるM.C.Escherの作品が有名である。講義の中では、Bruno Ernst (1994)とDoris Schattschneider (1990)の2冊の文献を学生に提示した。

図形の敷き詰めは、算数科の教科書の単元末に見られることから、単元のまとめや単元の内容の発展として位置づけることができる。そのような活動を取り入れることによって、単元の内容についての理解を深めたり、発展させた内容について考えたりすることができるという理由で、数学的な意義があるものとする。また、平岡(2001)に述べられているように、敷き詰めの考えは、三角形や四角形の内角の和を求める際など、図形の性質を見いだすことに生かすこともできる。

本研究では、「算数①」の講義を受講した児童学科の1年生204名(児童学科175名、子ども心理学科29名)を対象にした「算数①」の講義の中でレポート課題として敷き詰めの作品を制作した。その目的は以下の通りである。

(1) 三角形や四角形の組合せだけでできている図形または、それらの一部を曲線にした形を1つの単位とする図形は平面をすきまなく敷き詰められる、という命題について理解し体験すること。

(2) (1)の活動を通して算数的活動の楽しさとつくられた図形の美しさを感じ得ること。

なお、後ほど提示する作品については、平成16年度と平成17年度に提出されたものの中から選択した。

2. 講義の概要

前期に開講された、児童学部1年生を対象とした「算数①」の講義にはテキストとして、『個に応じた指導に関する指導資料—発展的な学習や補充的な学習の推進—(小学校算数編)』(文部科学省, 2002, pp.65-70)を用いた。各回の講義では1つの事例について扱った。テキストでは、図形の敷き詰めについての話題は事例6の中で提示されている。レポートの提示に至るまでに、筆者が構成した講義の流れは以下の通りである。

- (1) ノートに二等辺三角形, 直角三角形, 正方形, 長方形, ひし形, 平行四辺形, 台形と, 不等辺四角形を敷き詰めることによって, 合同なすべての三角形や四角形は平面をすきまなく敷き詰められるという命題について理解する。
- (2) 折り紙を使って合同な正六角形をいくつか作り, 一辺の長さが等しい正六角形は平面をすきまなく敷き詰められることを理解する。
- (3) 正方形や長方形の一部を切り取って反対側につなげた形を1つの単位とすると, その単位とする図形を使って平面をすきまなく敷き詰められることを理解する。
- (4) B5判用紙に自分で考えた合同な平面図形を敷き詰め, 作品を制作する。

上述の(3)の方法については, 第6学年の教科書(大日本図書, 2005)の巻末トピックに掲載されているので, 同じ図形を使って学生に提示した。

3. 図形の敷き詰めの事例

ここで, 学生の制作した作品を図形の構成の仕方によって, 大きく2つのカテゴリーに分類して考察を行う。

- (1) 基本図形を組み合わせた形のみによって構成された敷き詰め
- (2) 基本図形の一部を変形させた形によって構成された敷き詰め

とした。(1)は上述の2(1)で述べた図形のみ又は組み合わせて構成された作品, (2)は上

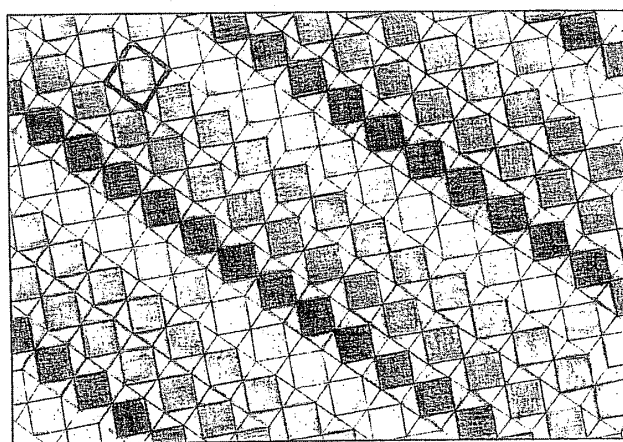
述の2(3)の考え方を使った作品である。したがって, (2)は切り取って反対側へつなげるという作業を伴うので, (1)の図形よりも(2)の図形の方が発展性のより高いものと考えられる。

- (1) 基本図形を組み合わせた形のみによって構成された敷き詰め

① A. Sさんの作品

【タイトル】虹 【製作にかかった時間】5時間半

図1 A. Sさんの作品



【感想】なかなか図形が決まらず, 苦労しました。正方形だけだとつまらないので正方形の中に正方形を入れたら直角三角形ができました。図形を考えるのは大変でしたが, 描くのは楽しかったです。

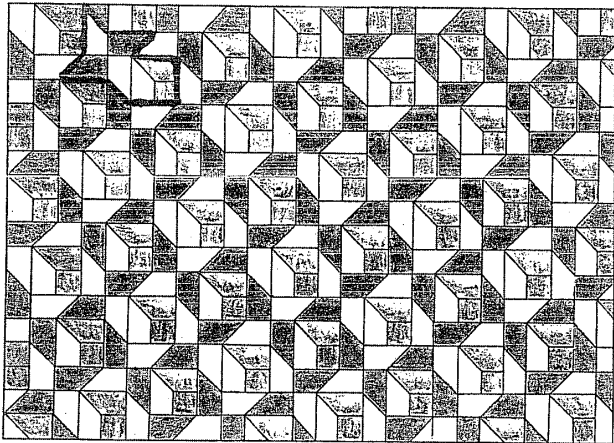
【考察】この作品は正方形と直角三角形で敷き詰められている。単位となっている図形は, 正方形の中に正方形が入った形である(図1の太線で囲んだ部分)。自分の作品を通して正方形と三角形を組み合わせた形は平面をすきまなく重なりもなく敷き詰められることを体験できた。また, 感想の内容から活動の楽しさについて感得できたと考えられる。

② M. Tさんの作品

【タイトル】手裏剣 【製作にかかった時間】12時間

【感想】最初1cm間隔で薄く縦と横に線を引きました。これが大変でした。初めは手裏剣のみでしたが, 色を塗ったあとで, 正方形の内側にも同じ

図2 M. Tさんの作品



大きさの台形を描くと立体に見えることに気がつきました。段々出来てくると、やっけて楽しかったです。

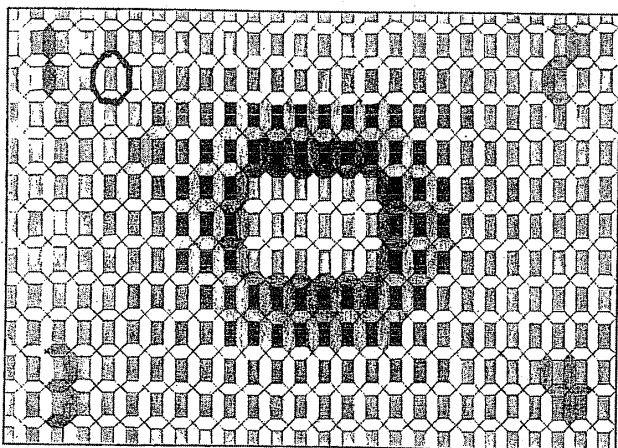
【考察】この作品は、正方形と台形で敷き詰められている。単位となっている図形は、手裏剣（台形4枚）と正方形（小さな正方形1枚と台形2枚）がペアになったものである（図2の太線で囲んだ部分）。台形4枚を使った手裏剣だけで敷き詰めていくと、正方形の隙間ができる。その隙間を小さな正方形1枚と台形2枚に分割させると、この作品が出来上がる。

自分の作品を通して正方形と台形を組み合わせた形は平面をすきまなく重なりもなく敷き詰められることを体験できた。また、感想の内容から、活動の楽しさについて感得できたと考えられる。

③ Y. Tさんの作品

【タイトル】時間と空間 【製作にかかった時間】

図3 Y. Tさんの作品



8時間半

【感想】色塗りが終わって作品が完成したのを見て、考えていたものよりもきれいにできていたのでとても嬉しかったです。今回は、ひし形（六角形の誤り）と長方形という、形が違う2種類の形を組み合わせたのに、すきまなく敷き詰められたので不思議な感じがしました。

【考察】この作品は、長方形と六角形で敷き詰められている。単位となっている図形は、長方形1枚と六角形4枚である（図3の太線で囲んだ部分）。自分の作品を通して長方形と六角形を組み合わせた形は平面をすきまなく重なりもなく敷き詰められることを体験できた。また、感想の内容から図形の美しさについて感得できたと考えられる。

上述の①～③の作品は、2種類以上の図形を組み合わせて構成されているが、今回提出された作品の中には単一の図形で構成されているものも見られた。単一の図形で構成されている作品については、講義の中で証明した「合同な三角形や四角形は平面をすきまなく重なりもなく敷き詰められる」という命題を自分の作品を制作することを通して確認したことにとどまっている。しかし、2種類以上の図形を組み合わせた作品を制作した学生は感想の内容から、数学的な内容すなわち、正方形を分割するとそれが直角三角形の敷き詰めになっていることに気づいたり、違う種類の図形でも平面を敷き詰められる可能性があるという不思議さに注目したりすることができている。

今後の指導としては、単一の図形よりは2種類以上の図形を組み合わせた作品を、さらにそのような作品を制作した学生が数学の内容に関わる記述ができるように指導することが大切である。

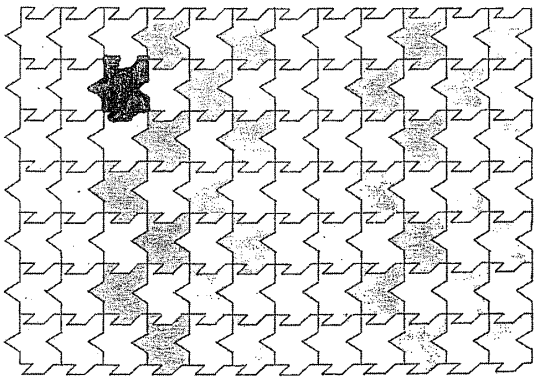
次に、カテゴリー（2）の作品についての考察を行う。

（2）基本図形の一部を変形させた形によって構成された敷き詰め

④ M. Oさんの作品

【タイトル】パズル 【製作にかかった時間】7

図4 M. Oさんの作品



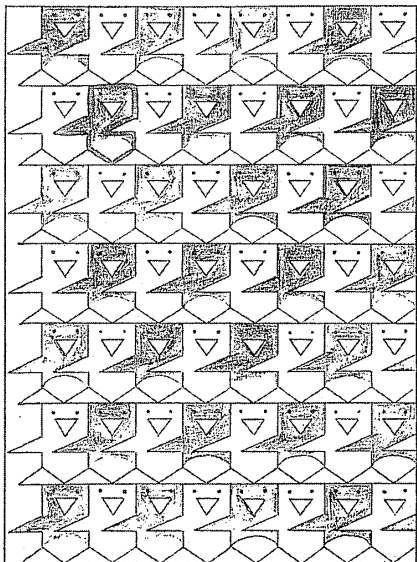
～8時間

【感想】先生が紹介していた例からヒントを得てこの図になりました。一番苦勞したのは、図（ピース）を正確に描いていくことでした。そして、色塗りもとても大変で指が痛くなりましたが、結果的によくできたので満足です。

【考察】この作品は、正方形の一部を切り取って反対側へつなげるという作業を2箇所で行った形で敷き詰められている。単位となっている図形は正方形を変形させた形である（図4の太線で囲んだ部分）。自分の作品を通して正方形を変形させた形は平面をすきまなく敷き詰められることを体験できた。また、感想の内容からは、達成感と共に身のまわりでの図形の敷き詰め注目できるようになったことが読み取れる。

⑤ E. Hさんの作品

図5 E. Hさんの作品



【タイトル】ペンギン 【製作にかかった時間】
3～4時間

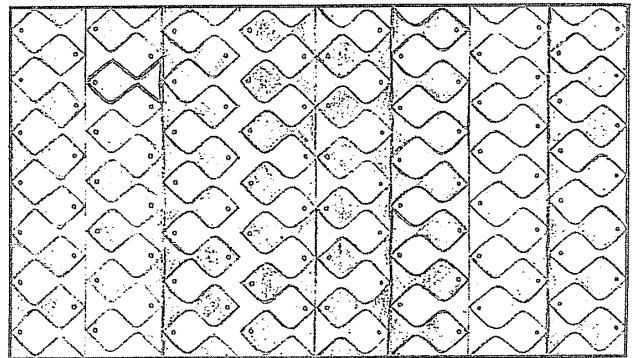
【感想】正確に描くのがとても大変でした。でも完成した時は達成感があって嬉しかったです。敷き詰め図形を描いてから、町でも歩道など様々な所で敷き詰め図形が使われているのに気づかされました。

【考察】この作品は、長方形の一部を切り取って反対側へつなげるという作業を2箇所で行った形で敷き詰められている。単位となっている図形は長方形を変形させた形である（図5の太線で囲んだ部分）。自分の作品を通して長方形を変形させた形は平面をすきまなく敷き詰められることを体験できた。また、感想の内容からは、達成感と共に身のまわりでの図形の敷き詰め注目できるようになったことが読み取れる。

⑥ S. Fさんの作品

【タイトル】さかな 【製作にかかった時間】3時間

図6 S. Fさんの作品



【感想】手書きでひたすら曲線を引くのがとても大変でした。始めは、1匹ずつ違う色で塗ろうと思いましたが、一列ずつ塗ることにしました。終わったときの満足感が何とも言えませんでした。

【考察】この作品は、曲線で構成されているが、長方形が基本になっている。長方形の一部を切り取って反対側につなげ、曲線にして魚の絵を描いている。したがって、講義の流れ（3）を応用して考えた作品である。この学生の感想の内容からも、1つの作品をつくり上げた達成感が読み取れる。

上述の④及び⑤を制作した学生は、自分の作品づくりを通して2つの事実を学習できたと考える。まず、講義の中で例示した「正方形や長方形の一部を切り取って反対側につなげると、1つの単位を作ることができる」という事実と、「その単位とする図形は、平面をすきまなく重なりもなく敷き詰められる」という事実である。

④や⑤のように直線で構成されている図形よりは、⑥のように曲線で構成されている図形の方が、学生にとっては考え出し、制作するのは困難である。しかし⑥のような図形を構成することができた学生は基本図形を遥かに発展させた図形でも敷き詰めをつくるのが可能であることを自分の作品を通して感得できたのである。

4. 全体的考察

本研究では、算数的活動の作業的・体験的な算数的活動に焦点を当てて、図形の敷き詰めについての考察を行った。学生が制作した作品の種類としては、制作の前に講義の中で示した、基本図形をそのまま敷き詰めたタイプ、基本図形を組み合わせさせたタイプ、図形の一部を切り取って反対側へつなげたタイプという3種類のすべてのタイプを予想通り見ることができた。

これは、学生が制作の活動に入る前に、先行研究に示したような図形の敷き詰めの代表的な作品を鑑賞できたということと、講義の中で「合同なすべての三角形や四角形は平面をすきまなく敷き詰められる」という命題を押さえた結果、命題に示すような図形は平面を敷き詰められることを感得できたからだと考えられる。今回あつた先行研究においても、任意の三角形や四角形が平面を敷き詰められる理由について、授業の中で子どもが考えてから制作に入っている。

また、学習感想の中の「作品の制作ができて楽しかった」という記述の中には、作品中に使われている色の種類や配色といった、美術的な内容に留まるものも見られた。そこで指導の見直しの1つとして、例えば「正方形で平面を敷き詰めた後にその正方形を対角線で分割していくと、直角二等辺三角形の敷き詰めと見することもできる」とい

った例示をすることによって、数学的な内容に関わる記述ができるようにすることが必要である。

今後の課題は、算数的活動を体験したことのある学生に同じ課題を提示し、今回の作品との比較及び分析を行うことと、図形の敷き詰め以外の題材を用いた算数的活動を取り入れた実践授業を考案し、考察を行うことである。

【参考文献】

- Bruno Ernst, *The Magic Mirror of M.C. Escher*, Taschen America Inc, 1994.
- 大日本図書, 教科書『たのしい算数 4 上』, 2005, p.50.
- 大日本図書, 教科書『たのしい算数 5 上』, 2005, p.60.
- 大日本図書, 教科書『たのしい算数 6 下』, 2005, p.90.
- Doris Schattschneider, *Visions of Symmetry - Notebooks, Periodic Drawings, and Related Work of M.C. Escher -*, W.H. Freeman and Company, 1990.
- G.Polya (柴垣和三雄 訳), 『帰納と類比』, 丸善, 1965 (第2版), 1965, p.12.
- 平岡忠 編著, 『小学校算数科指導の研究』, 建帛社, 2001, p.153-154.
- 伊藤説明朗, 『算数プロになるための12章』, 明治図書, 2004, pp.63-65.
- 文部省, 『小学校学習指導要領解説 算数編』, 1999, pp.14-15, p.120.
- 文部科学省, 『個に応じた指導に関する指導資料 - 発展的な学習や補足的な学習の推進 - (小学校算数編)』, 2002, pp.65-70.
- Nancy.A. Gonzales, *Problem Formulation: Insights from Student Generated Questions*, 1996.
- Voigt.J, *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, Lawrence Erlbaum Associates, 1995, pp.163-201.

要旨

本研究は、4年制大学の1年生を対象にした「算数①」の講義の中で行われた実践授業の1つを通して数学的な視点から「図形の敷き詰め」の意義を考察した

ものである。

学生は算数的活動の一例として図形の敷き詰めに取り組んだ。作品づくりに入る前に「合同な三角形や四角形は平面をすきまなく重なりもなく敷き詰めることができる」という命題を証明した。その後、学生は自分自身の作品をつくることによって、その命題が確かなものになった。敷き詰めの活動は、算数授業の中で作業的・体験的活動をすることの大切さを示していることが明らかになった。

(2005.10.28 受稿)