

# 金子忠雄の数学的価値論に関する研究

神林 信之（児童学科）

## Tadao Kaneko's Mathematical Value Theory

Nobuyuki Kambayashi

Department of Child Studies, Kamakura Women's University

### Abstract

On the basis of the research papers of Professor Tadao Kaneko, a mathematics education researcher, this study found the characteristics of his mathematical value theory to be as follows: Kaneko aimed at mathematical learning in which learners focus their attention on the intrinsic values of learning content and learn mathematics by becoming aware of and fully understanding the content. To achieve this, Kaneko recommended that mathematics teachers should analyze the relationships between the already-learned content and currently-learning content, and categorize the relationships into one of the three connection types, *cumulative and comprehensive*, *concurrent and consolidated*, and *leap and regress*. Then, mathematics teachers should develop and organize teaching materials based on their analysis.

Key words: mathematical value, intrinsic value, three connection types, cumulative and comprehensive, concurrent and consolidated, leap and regress

キーワード：数学的価値、本質的価値、接続の3類型、累積包括型、併立統合型、飛躍回帰型

### 1. はじめに

わが国の数学教育学における金子忠雄（1931～2009）の理論の特徴を捉える上で鍵になる用語に「価値」が挙げられる。金子の論文や著作には「価値」という用語が広くみられるのである。特に「教授価値」と「学習価値」は繰り返し使用されており、金子の数学教育理論において価値論は重要な位置を占めることになる（本稿では「金子忠雄の数学教育学理論における価値論」のことを「金子忠雄の数学的価値論」と呼ぶことにする）。しかし、金子忠雄の数学的価値論は未だ体系的に研究

されていない。金子の価値論は多岐にわたっているので、『金子忠雄先生論文集』<sup>1)</sup>収録の論文に限定して考察する。この論文集を分析することによって、金子忠雄の数学的価値論における理論的関心がどこにあるのかを明らかにしたい。

### 2. 金子忠雄の数学的価値論

#### （1）金子論文における「価値」の用語法

上記『金子忠雄先生論文集』の中で「価値」という語は112回使用されている<sup>2)</sup>。金子は「価値」という語を次のように使用している。

「手続きとしての数学」だけが教育され、学ぶ側にもそのような価値観を持たせてしまう<sup>3)</sup>。

算数の授業では、どちらかといえば「Goal への到達」にのみ、偏った価値を与えてきたように思われます<sup>4)</sup>。

“By oneself, Of oneself, For oneself”としての数学を形成し、「数学が見えてくる」には、“How to pose”と“価値の自覚”が肝要である<sup>5)</sup>。

算数科の内容の構成要素と仕組み、それらをどのように学んだり、追求したりするか、それが教材としてどういう価値があるか、を吟味検討することの必要性を提示してきました<sup>6)</sup>。

学習者にとって、その教材がなぜ学びの価値があるのか、挑戦に値するわからなさがあるのか、はっきりできるという点に学習課題設定の意義が考えられてくる<sup>7)</sup>。

教材の価値を自らの中に自覚し、既習事項の単なる延長ではとらえきれない新しいわからなさを追求するという好奇心、そういう発展を追求しての達成感 (achievement)、それに伴う喜び (delight) これが“楽しさ”でありたい<sup>8)</sup>。

教育課程の実践というからには、計画的・連続的・必然的な選択の立場が十分に述べられるべきであるのに、従来の問題解決論の研究テーマからいえば、偶発的・孤立的・恣意的な選択の立場が強い。教授可能性とともに、教授価値の考察が伴っていない<sup>9)</sup>。

上記の他には、「知的探究の価値」<sup>10)</sup>、「知的追求の対象としての価値」<sup>11)</sup>、「学習者にとってどんな価値意義があるのか」<sup>12)</sup>、「学びとる価値を自覚する」<sup>13)</sup>、「教材としての意味や価値」<sup>14)</sup>、「学びの価値」<sup>15)</sup>、「教科や教材それ自体の価値を学習者の側から質す」<sup>16)</sup>、「教材の『新しい価値

を掘り起こす』」<sup>17)</sup>、「教材を位置づけ、その価値を明らかにする」<sup>18)</sup>、などの表現がみられる。価値を質す (verify)、掘り起こす (dig up)、読み込む (read into)、求める (search)、自覚する (be aware)、深める (deepen)、受け止める (accept) という表現が使われているが、育成する (foster)、形成する (form)、修正する (modify)、改良する (improve)、別のものに変える (change)、鍛錬する (discipline) などの表現は見られなかった。1980年代中頃に、それ以前までの論文で使用されなかった「教授価値」という語が使用されはじめた<sup>19)20)21)</sup>。そして、その後、「教授価値」に加えて「学習価値」という語が使用されるようになる<sup>22)23)24)</sup>。その結果、1980年代後半から2000年代に至るまで、価値に関する記述では必ずと言ってよいほど「教授価値」と「学習価値」が共に使用されている<sup>25)26)</sup>。1980年代後半以降の2つの論文において、「教材価値」という語も使用されている<sup>27)28)</sup>。また、金子の論文には「教授＝学習」という語も広く使われており、それが初めて登場したのは、1976年に発表された論文「数学教育と『説明』概念 (I)」においてであり、「教授＝学習過程」という表現で使用された<sup>29)</sup>。また、「教授＝学習活動」という表現が初めて使われたのは、1977年の論文「数学教育と『説明』概念 (II)」においてであった<sup>30)</sup>。

金子の1980年代初頭の論文「『覚醒と納得』を大切に算数の授業を求めて〈1〉」および「『覚醒と納得』を大切に算数の授業を求めて〈2〉」では、「問い」と「答え」を繋げる際の教師の働き掛けについて「Goalづくり」と「Goalの価値づくり」という言葉で説明されている。ここでは、「問題ガアル」状態から「問題デアル」状態に高められる必要があること<sup>31)</sup>、そのために、何が学ぶ側にとって「問い」として通る Goal なのかを明確にすること<sup>32)</sup>、何故「問い」として考察の対象になるのか価値を少しでも気づくこと<sup>33)</sup>、授業活動を通して学び得たことについての総括を自らの言葉で表現すること<sup>34)</sup>、などが提言されている。この一連の論文で金子は「問い」の設定を「Goalづくり」、「問い」の価値への気づきを

「Goal の価値づくり」と名付けている。

一般に、価値とすること (to value) には2つの意味があり、一つは「重んずること」(to prize) や「尊重すること」(to esteem) であり、もう一つは「値踏みすること」(to appraise) や「見積もること」(to estimate) を意味する。前者は、「何かを大事にすること」(cherishing something)、「貴ぶこと」(holding dear) という行為を指し、後者は、「他の何かと比較してその価値の性質や量について判断を下すこと」(passing judgment upon the nature and amount of its value as compared with something else) という行為を指す<sup>35)</sup>。前者と後者の相違は、「本質的価値」(intrinsic value) と「道具的価値」(instrumental value) との間にときどき設けられる区別に相当する。本質的価値は、「判断の対象」にはなることができないし、「より多いとか、より少ないとか、またより善いとか、より悪いとか、の比較をすることができないし、そのように見なすこともできない」のである。他方、道具的価値は、問題があり、諸価値が対立して、そこで「ひとつの選択がなされなければならない状況」が生ずるときにのみ出現する。つまり、ある価値を採用し、ある価値を捨てる事態が生ずるときに、道具的価値は出現する<sup>36)</sup>。より基本的なものは本質的価値であり、本質的価値に支えられなければ、道具的価値は成立することができない<sup>37)</sup>。本質的価値に連なる言葉として、直接経験、実感、しみじみこたえる、本当に納得する、享受する、大事にするなどが挙げられ、道具的価値に連なる言葉として、間接経験、記号、価値づけ、値踏みする、見積もる、評価などが挙げられる<sup>38)</sup>。本質的価値と道具的価値の区別や関係について、「価値づくり」(valuing) と「価値づけ」(valuation) という語が用いられる。斎藤 (1980) によれば、J. Dewey は、『民主主義と教育』において、前者 (本質的価値) と後者 (道具的価値) を「価値づくり」と「価値づけ」という語で区別し、前者を強調することによって教育的価値の本質を明らかにしていた<sup>39)</sup>。

金子もまた、「Goal の価値づくり」という語を用いて、学習内容の本質的価値への着目と、その

具体的な実現を志向したのである。金子の論文では「実感」「自覚」「納得」「真実感」「覚醒」「感動」等の語がたびたび使用されている。

## (2) 教授価値と学習価値

先に述べたように1980年代中盤以降の金子の論文において「教授価値」と「学習価値」は繰り返し使用されている。教授価値と学習価値の規定や関係は次のとおりである<sup>40)</sup>。

『「在る」=教材に対して、教師が『教えねばならぬ』という立場からのかかわりで、教科の論理で精確に分析し(「よみとり」)、そこに真実を見出し、『私』の解釈を施し(「よみこみ」)、『教えたい』という立場に変わることが必要である。教授価値を附与された教材に『成る』。しかしこれだけでは『教える』という行為が実現されても、児童が『学ぶ』という行為の発生にはつながりにくい。』

「学級の児童一人ひとりの算数科学習における参加の状況や先行関連学習事項の認識状況をきちんと分析し(「みとり」)、それぞれが本習事項を学ぶことを通して、どうなしてほしいか『私』の願いを明確に設定(「みこむ」)することが必要になってくる。このことによって、児童にとって『学ばねばならない』ものとしての教材が、学習価値の見てきた『学びたい』ものとしての教材に成る。このようなレベルの教材を『成る』=教材と名付ける。」

即ち金子は、教師と教材(学習内容)との相互作用で確定した教授価値を、教師と学習者との相互作用を通して学習価値へと転化することが必要であるとしている。前者「教授価値」は「よみとり」と「よみこみ」によって確定し、後者「学習価値」への転化は「みとり」と「みこみ」によって行われるのである。

数学の内容のもつ価値(教授価値)と、学習者が活動を通して体験や習得をする価値(学習価値)の関係には様々な場合や様相が想定され、その主

な4つは次のとおりである。第1に、教授価値として想定されたにもかかわらず学習者に受け取られない場合がある。第2に、教授価値として想定され、変質して学習者に受け取られる場合がある。第3に、教授価値として想定され、学習者に意味をもって受け取られる場合がある。そして第4に、必ずしも教師が意図したものではなかったが授業を通して結果的に学習価値になる場合がある。

学習価値について金子は言う。

教師の教授価値をベースにしての多様な学習価値の統合収束が図れる。そして終結段階では、統合収束された内容を、仮説的定式化して検証・一般化を行い、学習者の内部に新しく組織づけられた認知体系を形成する。

(…中略・引用者…)教師の作って与える教授価値と学習者の持っている題材への欲求・興味・関心との接点を作り、複数の自立した問題意識が学習者に芽生える。それら複数の問題意識は、学習者相互の交信・批正・触発と教授価値からの突き返しとによって、組織づけられた学習価値に統合収束されてくる<sup>41)</sup>

学習価値の多様性の恣意的な是認という相対主義でなく、厳しく突き詰めた教授価値に基づいての多様な学習価値の組織化というゆるやかな客観主義へと変わって行かなければならない<sup>42)</sup>

金子は、「授業は、本来類型的、平均的な営みというよりは、個性的、非類型的な営みという側面が強く現れてこなければならない」<sup>43)</sup>とし、学習者が「自分のものとしての自覚と自己実現の意志をどう表現できるか」<sup>44)</sup>、「今までの活動や分かったことを自分なりにまとめてみることによって、次への探究活動の対象となる発展的な分かなさを作り出す」<sup>45)</sup>、「既有の認識の枠組との関連で、全体的、根本的なとらえなおしを、自分なりに行うという自己学習、個性的なとらえ、創造的な営み」<sup>46)</sup>をすることができる授業の実現を求

めている。金子は、教師が学習者の学びの内面に目を向け、「学習者側からの多様な学習価値の受け止めを率直かつ的確にし、それぞれを位置づけ組織してやる」<sup>47)</sup>ことを通して、学習者一人ひとりが自己化した数学を創り上げるような授業の実現を目指したのである<sup>48)</sup>。

金子は「多様な学習価値」と述べながら、一方で「教師の教授価値をベースにして」「学習価値の統合収束」と述べている。金子によれば、数学的知識の獲得・形成は“荷物の手渡し”とは全く異なって“植物の育成栽培”に例えられる。教師の教材解釈によって得られた教授価値を絶対的規範として固めて、他の立場や初学者の未熟な解釈を誤認として排除するという態度では、自立した「個」を生かすことにはならないし、そうかといって、無定見にいろいろな解釈をまるごと是認する立場を取るとすれば、学習者の“自己内省の深さと鋭さ”を養うことを逸してしまうのである。

金子は基本的に先の第3の場合（教授価値が意味をもって学習者に受け取られた＝学習価値になった）を実現することを志向しながらも、第3の場合の学習価値にある程度の膨らみを持たせるとともに、第4の場合（必ずしも教師が想定したものではなかったが学習者が受け取った＝学習価値になった）<sup>49)</sup>も認めていたのである。

また、金子は、算数数学学習の特徴を問題解決活動のねらいから、知識の習得場面と知識の習熟場面の大きく2つに類別した場合、それぞれに学習者の認知・再認知活動があることを認めながらも、算数数学学習の中核は知識の習得場面であるとしている<sup>50)51)</sup>。

### （3）教授価値と「接続の3類型」

金子は「式概念の深化・拡充とその系統」<sup>52)</sup>、「数学科のカリキュラム、指導のための系統」<sup>53)</sup>、「教材の系統を整備する」<sup>54)</sup>などの表現で、学問としての数学とはやや異なる学校数学独自の系統概念について述べている。

金子によれば、「学問としての数学は、学習者にとっては、彼の外側で、厳然と存在している体系であって、彼自身とは独立した価値を付与され



ている」<sup>55)</sup>ので、「学ぶ」ということは、ひたすら体系に忠実に演繹的な思考追求活動が重要になってくる。それに対して、「学校数学は、学習者の内側に、混沌とした経験の中から、教師の助成作用を受けながら、つくり出されていく体系である」<sup>56)</sup>ので、彼自身と深いかわりを持たざるを得ない。さらに金子は、「ある種の数学の体系を構成することが目的なのではない。算数科や数学科の目標が、児童・生徒の中にどう具現したかが問われるべきなのである。」<sup>57)</sup>、「学校数学の学ばれ方として、系統性という概念には学問としての数学のときよりも、幅を持たなければならないであろう。」<sup>58)</sup>と述べている。また、金子は次のように述べている。「数学という学問の内容が、他の学問にくらべて、とりわけ系統づけられているという事は、衆知の点であるが、教育内容に関しても、適当な時期に既習事項の整理、相互関連の確認、系統づけを行いながら、現在の学習事項の意味・役割の定位をすることが必要であろう。」<sup>59)</sup>これらの記述に教育内容の系統分析の必要性に関する金子の問題意識を認めることができる。

金子は言う。数学科の学習が成立するとは、数学科授業を通して学習者の自己実現が図られることであり、それは、次のような状況が備わることである<sup>60)</sup>。

- ア. 学校数学の教授＝学習活動において、個人の認識過程と学習集団の認識過程が相応していること（学習成立の社会性）
- イ. 学校数学の教授＝学習活動において、学校数学の学びの価値と自己学習能力とが相応していること（学習成立の内発性）

そのような教授＝学習活動の実現を構想する際のカテゴリー概念として、金子は、A教授者側について、「教授価値」「教授可能性」、B学習者側について、「整合性」「一貫性」を設定した。

学校数学における教授価値は、学問としての数学の立場（教科の論理）からの分析と学習者の自己化された数学の立場（学習者の論理）からの分

析から明らかにされる<sup>61)</sup>。教科の論理と学習者の論理は、一致することもあるかもしれないが、多くの場合、その学級や学習者によってところどころ微妙に過不足があったり軽重や濃淡があったりすることが通常である。

金子は言う。本習事項教材（ $M_1$ ）が定まると、先行関連学習事項（ $M_0$ ）や後続発展学習事項（ $M_2$ ）との関わりで、“ $M_1$ の教授価値の確定→学習価値への触発”が具体化される。このとき、数学的諸概念の認知－再認知過程において、学習者に《開眼の喜び》が生じる。認知－再認知過程は $M_0$ – $M_1$ の接続の様相（＝数学的諸概念の変容・発展）から3類型に分類することができる<sup>62)</sup>。それは、1984年に発表された論文「学校数学の教授＝学習活動と『問題』の構成」では、飛躍回帰型<sup>63)</sup>、連続累積型<sup>64)</sup>、併立相補型<sup>65)</sup>の3つであり<sup>66)</sup>、それはD.E. Berlyne (1965)の提示した6つの認知的葛藤（cognitive conflict）を学校数学の連続した指導計画上の問題にひきうつして考えられたものである<sup>67)</sup>。その後、3つの名称は、累積包括型、併立統合型、飛躍回帰型となった。

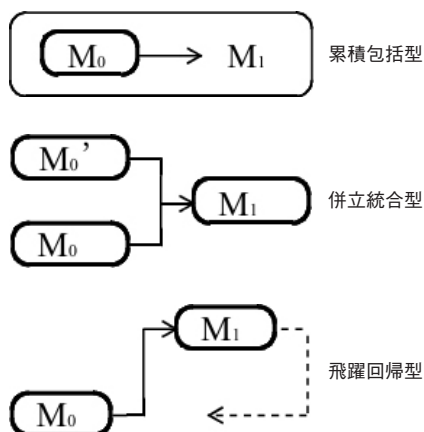


図 学校数学における既習内容  $M_0$  と本題材の学習内容  $M_1$  との接続の3類型

累積包括型は、中心となる概念が量的に拡大したり質的に深まったりすることで、既習内容  $M_0$  が本題材の学習内容  $M_1$  に含まれる接続の型である。併立統合型は、新たな視点で見ること、併立している既習内容  $M_0$  と本題材の学習内容  $M_0'$

とが統合的に本題材の学習内容  $M_1$  にまとめられる接続の型である。飛躍回帰型は、既習内容  $M_0$  の原理と全く異なる原理をもつ本題材の学習内容  $M_1$  に飛躍し、既習内容を本題材の学習内容から解釈し直せる接続の型である。

この「接続の3類型」理論は「教授価値」と「学習価値」という語が使用され始めた時期1980年代中頃とほぼ同じくして登場している。「接続の3類型」について金子は次のように述べている。

教材についても、読み取ると読み込むという相互交通が重要な意味をもって来る。既習と未習という新しさだけに目を向けた教材分析や、何が中核の本質原理かを見定めるクールな『読み取り』とともに、数学的認識における変容の3つの型のどれかを、その教材の特性として『読み込む』ことを教師は行う必要がある。<sup>68)</sup>

「接続の3類型」は、「教材解釈の上から見て、既習事項と本習事項との対比をして、何がどのように新しいのか、そして本習事項を学んだ後にはどのように新しく体系化できるか、をしっかり見極める」<sup>69)</sup>ため、そして、「数学的諸概念の認知－再認知過程で学習者に《開眼の喜び》が生じる」<sup>70)</sup>ようにするためのツールである。

教師は、3つの型のどれであるかを、その教材の特性として「読み込む」ことを行う必要がある。このように金子は、指導の系統を既習内容と本題材の学習内容との接続の様相に着目して、累積包括型、併立統合型、飛躍回帰型のどれに該当するかを分析、確定し、それに基づいた的確な教材構成をすることが必要であるとした。

ここで、「接続の3類型」の視点から数学科の「数と式」の題材で教材解釈を試みることにする。

中学校2年「連立方程式の利用」では、生徒が、連立方程式を利用するとより広く等しい数量関係を解明できることを学習する。既習の一元一次方程式の利用と本習の二元一次連立方程式の利用の接続様相は累積包括型である。累積包括型の場

合、①中心概念や原理が一貫しているということをつまえること、②本題材の学習内容の新しさに気付くことにより、原理の適用される範囲が広がったことをつまえること、が必要である。本題材に当てはめると、次の2つの教授価値があることが分かる。一つ目は、一元一次方程式の利用と二元一次連立方程式の利用には一貫した仮説演繹法の発想による問題解決の原理が働いていることである。そして二つ目は、未知数を2つ設定できるようになったというよさがあることである。そのことから、生徒が既習の一元一次方程式の利用と本習の連立方程式の利用それぞれの特徴やよさを踏まえて、自分なりに使いこなしていくことができるよう、連立方程式を一元一次方程式の利用と対比して学習できる教材構成を行うことの必要性が示唆される。そのための学習活動として、例えば、一元一次方程式と連立方程式が同じくらい有効な問題、どちらでも簡単に解決できるが連立方程式の方がやや有効な問題、連立方程式の方がかなり有効であると考えられる問題などを解かせて、立式までとその後の解法の特徴を調べることが挙げられるだろう。

中学校2年「不等式」では、既習の一元一次方程式で使われる原理やアイディアと同じものが使われる。ただし、解が範囲で表されることや両辺に負の数を掛けたときに不等号の向きが変わることなど不等式に固有な原理も見られる。一元一次方程式と一元一次不等式は対等の関係になっており、両者を付き合わせて、関係を表す式としてまとめられる。接続の様相は併立統合型である。併立統合型の場合、①既習内容と本題材の学習内容とが対比される関係であることに気付くこと、②新たな視点を発見、導入し、既習内容と本題材の学習内容とを統合的につまえること、が必要である。本題材の教授価値は次の2つである。一つは、逆算や代入によらず方程式と同じように不等式が解けるとともに、不等式と方程式は統合的に見ることができることである。もう一つは、大小関係を含む数量の関係を方程式のときと同じように考えて、不等式を用いて解決できることである。そのことから、既習内容である1年生の方程

式との関係を明らかにしながら学習できるような教材構成の必要性が見えてくる。そのための学習活動として、例えば、関係を表す式の分類をして等式にも不等式にもいつでも成り立つものとそうでないものがあることを捉える場面、不等式の解き方を類推する場面、見いだした不等式の解き方と既習の方程式の解き方の共通点と相違点を挙げる場面、不等式を利用して文章題を解決するときの原理や手順を捉える場面などで、一元一次方程式と一元一次不等式との対比を行うことが考えられる。

中学校1年「方程式の解き方」はどうだろうか。本題材で生徒は方程式を、両辺を対等に見て式変形して解を求めることを初めて経験する。その式や等号の見方は既習内容である小学校での「数と計算」領域には見られなかったものであるとともに、両辺相殺による式変形により既習内容の逆算による式変形を解釈し直せるため、接続の類型は飛躍回帰型である。飛躍回帰型の場合、①既習内容の原理や見方と全く異質な原理や見方の存在に気付くこと、②見いだした事柄の意味やよさに着目するとともに、それを用いて既習内容が否定されずに解釈し直せることに気付くこと、が必要である。本題材の教授価値は次のとおりである。逆算のときとは異なる等号の見方があること、つり合いと見る等号の見方に立つ両辺相殺型式変形による解の求め方が優れていること、移項は逆算と同じ形をしており逆算は否定されないこと。そのことから、逆算のときの等号の見方と両辺相殺による式変形のときの等号の見方を対比することを通して、等式変形の原理とそれを用いての方程式の解き方を見いださせていくような教材構成をすればよいというヒントが得られる。そのための学習活動として、例えば、方程式の解を代入や逆算によって見つけた後、解の同じ方程式同士の関係を検討することが有効に働くのではないかというアイデアが生じる。

このように、本題材の学習内容と既習内容との接続の様相に着目し、3つに分類した金子の「接続の3類型」理論は、教師が教授価値を明らかにして指導の構想を着想することを扶けるととも

に、学習者の概念形成の困難を克服して知識の再体系化を促すことを支援するものである。

筑波大学の磯田は、教材の価値・系統を改めて問い返す研究者や先生方の姿勢が求められている中、金子監修の『学びの数学と数学の学び』が、授業作り・単元構成・年間指導計画・学年をまたいでのカリキュラム構想を練る際の根拠を示す研究書であると評価している<sup>71)</sup>。また、「金子理論は、本時がそれまでの学習をどのように生かし本時の学習は後にどう生かされるかという教育課程の系統分析において、本時に必要な学習課題を図式的に示す理論である」とも述べている<sup>72)</sup>。

金子は、価値の深化についても述べている。

「学習者の興味・関心を見取り、読み取った教材の本質を、どう学習者の興味関心の充実へと相応することができるか、読み込むという仕事、教師の指導力となる。…(中略・引用者) …このような「問いの転化」こそ教材価値の深化であり、共有化であり、教師と学習者、学習者と学習者との間に展開される「対話＝問答」の高度な組織的発展過程を可能にするのである。」<sup>73)</sup>

「教師が「教えねばならぬ」ものとして「よみとる」のは、数学的内容の系統の順序づけであり、そこに、この系統の中での、本習内容の意義、役割、位置を明らかにするための空隙(新しさ)を「よみこみ」、本習事項を「教えたい」ものとしてはっきりさせるのである。他方、それぞれの数学的内容の学習によって、学習者の中に形成・獲得されている(される予定の)認識の枠組がある。先行関連既習事項の学習によって、学習者の中に形成・獲得されている認識の枠組を「よみとり」「学ばねばならぬ」ものとして本習内容をつき合わせたときに、学習者が、どのような新しい認識枠を形成・獲得すべきか、何か空隙(新しさ)であるかを「みこむ」ことにより、本習内容が「学びたい」ものへと価値が深まってゆくようにするのである」<sup>74)75)</sup>

金子は、学校数学における問題解決活動では、単に当面している数学的問題の「解決」(個別の数学的問題の解法の種類とか、エレガントな着想はないとか、などのミクロ的な立場)で完了するのではなく、その問題を解決することによってどんな認知変容を学習者に期待するのが重要であると考えたのである。

#### (4) 学習価値と価値クラスター

海外に目を向けると数学的価値論を継続的に展開した数学教育学の研究者としてモナッシュ大学の A.J. Bishop が挙げられる。Bishop は数学授業における価値について次の指摘をしている。

多くの教師や教育研究者たちには、数学は価値とは無縁の知識 (value-free knowledge) だと信じられているようだ。… (中略・引用者) … 学校における数学は、多くの場合スキルが強調される科目であり、教育において質問が行われたり触発されたりすることがないために、生徒の、数学教育を通して開発されている価値は、隠され、知られず、分析されないままとなる<sup>76)</sup>

多くの数学教師が、数学を教えるときにどんな価値を教えているかということを考えることすらしていないだろう<sup>77)</sup>

Bishop は、数学の学習における価値を6つの価値クラスター (six value clusters) で整理した。それらは、合理性 Rationalism、経験性 Empiricism、統制性 Control、発展性 Progress、開放性 Openness、神秘性 Mystery である。合理性 Rationalism とは、根拠を明らかにして論理的な説明に価値をおく考え方であり、経験性 Empiricism とは、実験や実測など実物を調べることに価値をおく考え方である。統制性 Control とは、習得した知識や技能に対する安心感であり、発展性 Progress とは、理論を見いだしたり発展させたりできるという動的な感情である。開放性 Openness とは、数学的知識の他の人々との共有を重視することであ

り、神秘性 Mystery とは、数学的知識の抽象性や神秘性を重視することである<sup>78)79)80)81)</sup>。

金子の「接続の3類型」毎に Bishop の価値クラスターと対応させるとどうなるだろうか。その類型特有の学習価値はあるのだろうか。

最初に、累積包括型の場合、既習内容と本題材の学習内容で中心概念・原理が一貫しているの、まず、統制性 Control が、また、原理が適用される範囲が広がるので、発展性 Progress も挙げられるだろう。

例えば、本題材の学習内容を「連立方程式の利用」とすると、関連する既習内容は「一元一次方程式の利用」であり、両者の接続は累積包括型である。既習の一元一次方程式の利用で身に付けた考え方 (分からないものを仮に  $x$  と置き、文脈どおりに立式すればよい) の有効性を捉えることは統制性 Control という価値に関係し、文字を2つ使うことができ逆思考せず立式ができるという本題材の学習内容の有効性を捉えることは発展性 Progress という価値に関係する。

次に、併立統合型の場合、既習内容と本題材の学習内容とが対比的な関係であり、一步高い視点から見ると統合的に捉えることができるので、高い視点への気づきによる世界の広がり、即ち発展性 Progress と対比的な両者の共通点への着目、即ち統制性 Control が挙げられるだろう。

例えば、本題材の学習内容を「凹四角形の内角の和」とすると関連する既習内容は「凸四角形の内角の和」であり、一步高い視点 (有向量の視点、負の角の存在への着目) からみて「四角形の内角の和」に統合されるので併立統合型接続である。この学習では、回転の向き (負の角) への着目による世界の広がり は発展性 Progress という価値に関係がある。そして、回転の向き (負の角) の導入によって凸四角形の内角の和  $360^\circ$  と凹四角形の内角の和  $360^\circ$  とが統合されることは統制性 Control という価値に関係がある。

そして、飛躍回帰型の場合、本題材の学習内容が既習内容と全く異なる原理や見方に飛躍するので、発展性 Progress が挙げられる。

例えば、「一元一次方程式の解き方」の学習にお



いて、生徒は、両辺を対等に見て式変形をして解を求めることを初めて経験する。その式や等号の見方は既習内容である「数と計算」や「文字式」の学習では見られなかったものであり、その接続は飛躍回帰型である<sup>82)83)</sup>。本題材の学習内容で現れてほしい価値は発展性 Progress である。統制性 Control という価値は基本的に前面に出ることはない。

こうして数学の学習で現れる学習価値を、金子の「接続の3類型」毎に Bishop の価値クラスターと対応させてみると、総論的に次のことが言える。累積包括型と併立統合型の場合の学習価値についてはどちらも、統制性 Control と発展性 Progress に関係する。飛躍回帰型の場合の学習価値は主に発展性 Progress に関係する。また、どの接続の様相においても、指導の構想の際に、学習活動において筋道を立てて考えたり、場合を尽くしたり、根拠を明らかにしたりすることを重視した場合の学習価値は合理性 Rationalism に関係し、実測や観察をしたり、具体的操作をしたり、帰納的思考を重視した場合の学習価値は経験性 Empiricism に関係する。そして、対話的な活動（仲間との対話、教師との対話、自己との対話、先人との対話、観念や概念との対話）を重視した場合の学習価値は開放性 Openness や神秘性 Mystery などに関係する。神林（2005, 2011）は、金子の「接続の3類型」理論と Bishop の「価値クラスター」理論を参照して、学習者が新たな認識を今までの認識の体系に適切に位置付けることができるようにするための数学科の教材構成の方略を提案した<sup>84)85)</sup>。

### 3. まとめと今後の課題

金子忠雄の数学的価値論において主張されたことは、本習事項の教授価値は教材の系統分析を通して確定されること、教授価値の確定と学習価値への転化を行う際に威力を発揮するツールが「接続の3類型」理論であること、であった。

2021（令和3）年度から全面実施されている学習指導要領（中学校数学）では、「深い学び」、「数

学のよさを実感」などの表現で数学的価値の教育を求めており、筆者は金子忠雄の数学的価値論を学び、実践していくことが、今後の数学教育の課題に答えることになると思う。

### 引用・参考文献

- 1) 風間寛司・長谷川浩司・三澤淳伸・宮宏之編、2010年、全378頁。二部構成で、第一部（pp.7-342）には数学教育に関する論文が54編、第二部（pp.345-377）には微分幾何学に関する論文が5編収録されている。市販されずに関係者のみに配付された。
- 2) 類似あるいは関連する語としては「意義」が92回、「意味」が341回、「本質」が78回、「自己実現」が16回、「自己関与」が9回使用されている。
- 3) 金子忠雄「数学教育と『説明』概念（Ⅱ）」『新潟大学教育学部長岡分校研究紀要』No.23、1977。
- 4) 金子忠雄「『覚醒と納得』を大切にする算数の授業を求めて」＜2＞『算数教育』、明治図書
- 5) 金子忠雄「学校数学における『数学的諸活動』と『問題』の関係について（1）」『新潟大学教育学部長岡分校研究紀要』1980年（『金子忠雄先生論文集』184頁）。
- 6) 金子忠雄「教師としての算数」『金子忠雄先生論文集』187頁。
- 7) 金子忠雄「学習課題設定の意義」『金子忠雄先生論文集』203頁。
- 8) 金子忠雄「楽しくわかる算数・数学の授業の要件 - 児童・生徒の自己関与と作業活動 -」『金子忠雄先生論文集』224-225頁。
- 9) 金子忠雄「学校数学の教授＝学習活動と『問題』の構成」新潟大学教育学部研究紀要 Vol.26 第1号、1984年、1-2頁。
- 10) 前掲論文（3）
- 11) 前掲論文（3）
- 12) 金子忠雄「『問』の時代における算数科指導の問題 - 教師の構えと内容の精選 -」学校教育研究所『研究年報』23号、1979年（『金子忠雄先生論文集』175頁）。

- 13) 前掲論文 (5) 181頁。
- 14) 金子忠雄「小学校算数の今日的課題」『金子忠雄先生論文集』190頁。
- 15) 前掲論文 (14) 190頁。
- 16) 前掲論文 (7) 203頁。
- 17) 「教科経営の目ざすこと ―一人ひとりを生かす学習の実現と生きて働く学力の育成―」『金子忠雄先生論文集』205頁。
- 18) 「図形指導と論理的な考え」東洋館『新しい算数研究』123号、1981年 (論文集195頁)。
- 19) 「算数を創り出す子ども < 1 > ―背景と意図―」『金子忠雄先生論文集』238頁に「教授価値と教授可能性」という記述がある。
- 20) 前掲論文 (9) 2頁に「教授価値の考察」がある。
- 21) 金子忠雄「学校数学の教授＝学習活動と『問題』の構成 (続)」新潟大学教育学部研究紀要 Vol.27 第2号、1985年、2頁に「教授価値」がある。
- 22) 金子忠雄「知的好奇心を刺激し、思考を豊かにする算数教科教材の構想」明治図書『数学教育』1985年 (『金子忠雄先生論文集』279頁) に「教授価値」「学習価値」がある。
- 23) 金子忠雄「算数科授業の成立と『話し合い』活動」『金子忠雄先生論文集』289頁に「教授価値」「学習価値」がある。
- 24) 金子忠雄「『自ら学ぶ子ども』を育てる授業 ―授業をどう組織するか―」『金子忠雄先生論文集』294頁に「教授価値と共に、学習価値を盛り込むようにする」がある。
- 25) 金子忠雄「なぜ そしてどのように < 個 > を問うか? ―授業構想の手順と授業成立の過程とを中心にして―」、金子忠雄先生論文集、319～320頁に「教師の教授価値をベースにしての多様な学習価値の統合収束」がある。
- 26) 金子忠雄「算数の教えと学びの活性化を求めて ―認知・再認知における開眼の喜び―」『金子忠雄先生論文集』322頁に「教授価値の確定→学習価値への触発」がある。
- 27) 金子忠雄「教授＝学習活動の成立と自己内対話の在り方」『金子忠雄先生論文集』296頁に「教師の『問い』が、学習者の『問い』に転化し、その問いの解決が、基体である学級集団のなかで追求されていくことでなければならない。このような『問いの転化』こそ教材価値の深化であり、共有化であり、教師と学習者、学習者と学習者との間に展開される『対話＝問答』の高度な組織的發展過程を可能にするのである」がある。
- 28) 前掲論文 (25) 318頁に「客観的な規範的な対象としての教材価値」「主観的で内発的な対象としての学習価値」がある。
- 29) 「説明 (explanation) は、教授＝学習過程においても、教科書の表記においても、しばしば用いられているが、必ずしも同一の意味で述べられていないのが現実である。」
- 30) 「教える側と学ぶ側で、できるだけ共通の場 (水準) で、教授＝学習活動をすすめることが大切である。」
- 31) 前掲論文 (4)
- 32) 金子忠雄「『覚醒と納得』を大切にする算数の授業を求めて < 1 >」『算数教育』No. 241、明治図書
- 33) 前掲論文 (32)
- 34) 前掲論文 (32)
- 35) 斎藤勉『デューイの教育的価値論』福村出版、1980年、85頁。
- 36) 前掲書 (35) 85頁。
- 37) 前掲書 (35) 86頁。
- 38) 前掲書 (35) 87頁。
- 39) 前掲書 (35) 186～187頁。
- 40) 前掲論文 (22) 279頁。
- 41) 前掲論文 (25) 320頁。
- 42) 前掲論文 (25) 319頁。
- 43) 金子忠雄「知的好奇心の触発と授業の構想」『金子忠雄先生論文集』254頁。
- 44) 前掲論文 (12) 172頁。
- 45) 金子忠雄「発問・助言を工夫した算数科授業」『金子忠雄先生論文集』211頁。
- 46) 金子忠雄「学びの意味への注目と学びの体系の変革とを求めて」『金子忠雄先生論文集』2

- 29頁。
- 47) 前掲論文 (25) 319頁。
- 48) 「教えなければならないこと」、「学ばなければならないこと」が明確でないと学習指導案を作成する際に授業仮説や講じる手立てが曖昧で主張の見えないものとなってしまうが、その一方で、あまりにもその思いが強く、児童や生徒を理論の枠組みに無理やり当てはめてしまったり、教師の授業技術に硬さがあったりすると、児童や生徒の多様な発想や気付き等を引き出すことができずに授業を引っ張ってしまうおそれがあるので注意が必要であることを、私たちは経験的に理解している。
- 49) この場合の例として、①生徒が教師や仲間の言動によって触発されて得られた内容、②教師が想定しなかった内容を生徒が発見した場合(例:「平行四辺形になるための条件」が教科書に4つ載っているが、それら以外の条件を生徒が発見する場合がある)などが挙げられる。
- 50) 前掲論文 (26) 322頁。
- 51) 知識の習熟にかかわって、使う知識が1つに確定している場合は適用と呼ばれ、これに対して、複数の知識の候補の中から1つまたは幾つかを選び、当面の問題場面に使う場合は活用と呼ばれる。斎藤の論考を参照すれば、活用という学習活動は、「価値とすること」のうち、「他の何かと比較してその価値の性質や量について判断を下すこと」という行為が行われる学習活動であり、その意味で、「道具的価値」が出現する学習活動である。
- 52) 金子忠雄「『算数』から『数学』へ - 数と式における指導系統を中心として -」『金子忠雄先生論文集』217頁。
- 53) 金子忠雄「調査問題の分析と評価への課題」『金子忠雄先生論文集』220頁。
- 54) 金子忠雄「『算数』から『数学』へ - 数学教育の立場から -」『金子忠雄先生論文集』19頁。
- 55) 前掲論文 (52) 214頁。
- 56) 前掲論文 (52) 214頁。
- 57) 前掲論文 (52) 215頁。
- 58) 前掲論文 (52) 215頁。
- 59) 金子忠雄「論理指導と日本語」『金子忠雄先生論文集』120頁。
- 60) 前掲論文 (21) 2頁。
- 61) 前掲論文 (21) 2頁。
- 62) 前掲論文 (26) 322頁。
- 63) 飛躍回帰型: 既習の認識の形式  $a$  をその延長線方向で当てはめることはせずに、飛躍をした新しい認識の枠組  $b$  に着眼し、それを用いることにより、 $a$  の枠組の見直し、調節を図るというものである。
- 64) 連続累積型: 先行関連学習原理  $a_{i-1}$  は、基本的な部分はそのまま保存され、対象領域の拡大に伴う微調整によって本習原理  $a_i$  を形成してくるものである。
- 65) 併立相補型: 先行学習内容の原理  $a$  に対して、それと全く対比的な本習内容の原理  $b$  を対置させ、このことによって、旧原理である  $a$  の特徴が一層明確にとらえると共に、 $a$  と  $b$  を統括した全体を新しい内容原理  $A$  として活用するのである。
- 66) 連続累積型は初期の頃の他の論文等で、累積発展型、連続的累積型、累積包括型と表記されることもあった。併立相補型は他の論文等で、対比相補型、対比的相補型、並立相補型、併立統合型と表記されることもあった。飛躍回帰型は他の論文等で、飛躍的回帰型と表記されることもあった。最終的に3類型の名称、表記は、累積包括型、併立統合型、飛躍回帰型と統一された(金子忠雄監修、酒井勝吉・長谷川浩司『対話と探求を深める数学科授業の構築』教育出版、1989年、9頁。金子忠雄監修、井口浩・小田暢雄・風間寛司・星野将直・宮宏之・神林信之『学びの数学と数学の学び』明治図書、2002年、23頁。)
- 67) 前掲論文 (9) 4-5頁。バーライン (Berlyne, E.D.: 「Structure and Direction in Thinking」1965年、236-275頁) は、思考や学習活動に不可欠の条件として認知的葛藤 (cognitive conflict) を挙げ、その6類型(驚き、疑

- 問、当惑、矛盾、認知的不調和、混乱)を設定した。
- 68) 「算数を創り出す子ども < 1 >」『金子忠雄先生論文集』237頁。
- 69) 金子忠雄監修『学びの数学と数学の学び』明治図書、2002年、15頁。
- 70) 前掲論文 (21) 1 - 2 頁。
- 71) 磯田正美「『学びの数学と数学の学び』刊行に寄せて」前掲書 (69)、190頁。
- 72) 磯田正美「『教えたくなる数学・学びたくなる数学』刊行によせて」『教えたくなる数学 学びたくなる数学』考古堂、2012年、191頁。
- 73) 前掲論文 (27) 296頁。
- 74) 前掲論文 (22) 281頁。
- 75) 金子は学習内容が数式分野の場合に関する「発想論理と表現形式の異同」理論を論文で示している(「知的好奇心を刺激し、思考を豊かにする算数科教材の構想」『金子忠雄先生論文集』282頁など)。
- それによると例えば、(一元整式) + (一元整式) の求答型計算  $f(a) + g(a) = h(a)$  と一元  $n$  次方程式  $f(x) = g(x)$  の求解型計算はいずれも等式という同一の表現形式を持ちながら、前者は「導出型等式」であり、後者は「関係型等式」で、全く発想を異にしている。従って、同類項の求答型計算と方程式の求解計算の関係は、「表現形式：同 - 発想論理：異」である。(前掲論文 (21) 3 頁)
- また、例えば、一元  $n$  次方程式  $f(x) = g(x)$  と一元  $n$  次不等式  $f(x) > g(x)$  は、数学的表現の上では、等式と不等式というちがいをもちながら、求解型計算という両辺を同時に対象とする式変形の原理によって、解を求めることができる。従って、 $f(x) = g(x)$  と  $f(x) > g(x)$  との関係は、「表現形式：異 - 発想論理：同」である。(前掲論文 (21) 3 頁)
- 76) Bishop, A.J. Mathematics values in teaching process In Bishop, A.J.(Eds.), Mathematical Knowledge : Its Growth Through Teaching Kluwer Academic Publishers, 1991, pp.196.
- 77) Bishop, A.J. What values do you teach when you teach mathematics? In Paper Gates.(Ed.) Issues in Mathematics Teaching Routledge Falmer, 2001, pp.93-104.
- 78) Bishop, A.J.前掲論文 (76) pp.195-214.
- 79) Bishop, A.J. Mathematical Enculturation : A Cultural Perspective on Mathematics Education Kluwer Academic Publishers, 1988.
- 80) Bishop, A.J. Numeracies mathematics and values - a cultural perspective、国際教育協力シンポジウム「教育の質的改善への課題」(主催：筑波大学教育開発国際協力センター)、2005年1月23日。
- 81) これらは、3つの互いに補足し合うペア (three complementary pairs) として構成され、観念的諸価値 (ideological values)、感情的あるいは態度的諸価値 (sentimental or attitudinal values)、社会学的諸価値 (sociological values) の3つの次元いずれかに結び付いている。
- 82) 前掲論文 (52) 214頁～217頁から、一元一次方程式の解き方に関連する部分を引用する。
- 「全く新しい立場からの式計算が導入される。関係式型の式変形がそれである。具体的には『方程式』と『解く』という概念がそれである。これは、導出型とは異なり、原式においてすでに左辺と右辺が完備している等式である。その等号の用いられ方は導出型の発想が通用しないものである。従って、両辺を常に完備したままで、対に式を変形するという態度の変更がなされなければならない。」
- 83) 星野将直 (前掲書 (69) 61頁) は、方程式の解法について、最終的に獲得の目標を「等式の性質を用いた解法」とすると、この手続きを生徒が獲得する上で、2つの認知上の問題があるとして、次のように述べている。一つは、方程式の定義は、恒等式と方程式を対比して認識し、方程式の解を求めるということは、条件を求める、すなわち代入という活動に基づいているわけですから、「等式の性質を用いて最簡二項方程式  $x = \bigcirc$  に変形」することには結びつかないわけです。つまり、生徒にとっては「方程式を解く」ことの



意味と、一般的な解法である「等式の性質を用いた解法」手続きはリンクせず、認知獲得上の不整合ということになります。二つは、既習の関連する解法の手続きとして、小学校での逆算による解法がありますが、等式の性質を用いた解法と比べると、定義との関連性・等号の意味・使う等式変形の原理などから、明らかにこれらの2つの手続きには不整合があります。

- 84) 神林信之「学び続ける力を育成する授業 ―知識の習得場面を中心として―」日本数学教育学会第38回論文発表会論文集、7頁～12頁、2005年。
- 85) 神林信之『教材構成の力を鍛える』晃洋書房、2011年、129－130頁、204頁。

## 要旨

数学教育学の研究者であった新潟大学名誉教授金子忠雄の論文等54編を調査した結果、金子忠雄の数学的価値論の特徴として次の2点を指摘した。①金子は、学習者が学習内容の本質的価値に着目して自覚や納得を伴いながら数学を学んでいくことができることを目指した。②金子は、既習内容と本題材の学習内容の関係が「接続の3類型」（累積包括型、併立統合型、飛躍回帰型）のどれに該当するのかを分析して、それに基づいた教材構成をすることが必要であると提言した。

(2024年9月9日受稿)